Algèbre linéaire - Dimension finie

1 Calculs pratiques

Exercice 1. ○○○ – *Calculs dans* $\mathbb{R}^4$

Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}\{(1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)\}.$$

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$, puis que $G = F$.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. ○○○ – *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3\ ,\ u(e_2) = 3e_2\ ,\ u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$. L'endomorphisme u est-il injectif ? Est-il surjectif ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$. Quel est le rang de u ?
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 3. ○○○ – *Une application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^4$

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective?

Exercice 4. ◐○○ – *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$

On définit sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'application $u : P \mapsto P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

2 Sous-espaces

Exercice 5. ♣ – ●○○ – *Rang d'une famille augmentée*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que $\dim(F+G) \leq \dim F + \dim G$ et préciser le cas d'égalité.

2. On considère $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E. Montrer que, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$:

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) \leq \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) + n - p.$$

Exercice 6. ●○○ – *Suites récurrentes*

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + \cdots + a_p u_n.$$

   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension finie et préciser sa dimension.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donner une base de l'espace des suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

Exercice 7. ♣ – ●◐○ – *Supplémentaire commun à deux espaces*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension p. Montrer que F et G ont un supplementaire commun : il existe un sous-espace H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.

Exercice 8. ♣ – ●◐○ – *Sous-espaces de grande dimension*

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension n.
On suppose que $\sum_{i=1}^{p} \dim F_i > (p-1)n$. Montrer que $\bigcap_{i=1}^{p} F_i \neq \{0\}$.

Exercice 9. ♣ – ●●○ – *Matrices magiques*

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *magique* s'il existe un nombre réel m tel que la somme des coefficients de M présents sur chaque ligne et sur chaque colonne vaut m. Montrer que l'ensemble des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer sa dimension.

Exercice 10. ●●● – *Équivalence sur les familles de sous-espaces*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que deux r-uplets $(F_1, \dots, F_r)$ et $(F'_1, \dots, F'_r)$ de sous-espaces vectoriels de E sont *équivalents* s'il existe un automorphisme $\phi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\forall i \in [\![1, r]\!], \phi(F_i) = F'_i$.

1. Classer les sous-espaces vectoriels de E à équivalence près.

2. Classer les couples de sous-espaces vectoriels de E à équivalence près.

On suppose désormais pour simplifier que E est de dimension paire et on note $r = \frac{1}{2}\dim E$.

3. Montrer que les triplets de sous-espaces vectoriels (F_1, F_2, F_3) tels que

$$\forall i \in [\![1,3]\!], \dim F_i = r \text{ et } \forall i \neq j \in [\![1,3]\!], F_i \cap F_j = \{0_E\}$$

sont tous équivalents entre eux.

4. Montrer qu'il existe une infinité de quadruplets de sous-espaces vectoriels (F_1, F_2, F_3, F_4) tels que

$$\forall i \in [\![1,4]\!], \dim F_i = r \text{ et } \forall i \neq j \in [\![1,4]\!], F_i \cap F_j = \{0_E\}$$

deux à deux non équivalents.

3 Applications linéaires

Exercice 11. ●○○ – $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

a) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$; b) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$; c) $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 12. ●○○ – *Endomorphisme localement nilpotent*

Un endomorphisme f de $\mathscr{L}(E)$ est dit localement nilpotent si

$$\forall x \in E,\ \exists k \in \mathbb{N},\ f^k(x) = 0.$$

1. Montrer que si E est de dimension finie, un endomorphisme localement nilpotent de E est nilpotent.

2. Montrer que le résultat est faux en général si on ne suppose plus E de dimension finie.

Exercice 13. ♣ – ●○○ – *Décomposition en somme d'endomorphismes de rang* 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'un endomorphisme u de E de rang r est somme de r endomorphismes de rang 1.

Exercice 14. ●○○ – *Un endomorphisme de* $\mathscr{L}(E)$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On définit ϕ de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$, par $\phi : f \mapsto u \circ f \circ v$. Montrer que $\phi \in \mathscr{L}\left(\mathscr{L}(E)\right)$ et déterminer à quelle condition $\phi = 0$.

Exercice 15. ♣ – ●◐○ – *Noyaux et images itérés*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $(\operatorname{Ker} u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\operatorname{Im} u^k)_{k\in\mathbb{N}}$) est croissante (resp. décroissante) pour l'inclusion.

2. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq p$, $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^p$ et $\operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^p$.

3. Montrer que, pour cet entier p, $E = \operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$.

Exercice 16. ●◐○ – *Inclusion de noyaux*

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(E,G)$.
Le but de l'exercice est de démontrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v \iff (\exists w \in \mathscr{L}(F,G) : v = w \circ u)$.

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathscr{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$.

2. En considérant un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} u$ dans E et un supplémentaire T de $\operatorname{Im} u$ dans F, construire une application linéaire $w \in \mathscr{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$.

Exercice 17. ♣ – ●◐○ – *Indice de nilpotence*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme nilpotent de E : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. On veut montrer que $u^n = 0$.

1. **Première méthode.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $N_k = \operatorname{Ker}(u^k)$.

   (a) Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

   (b) Montrer que si $N_{k_0} = N_{k_0+1}$, alors la suite (N_k) stationne en N_{k_0}.

   (c) En déduire que $N_{k_0} = E$ et conclure.

2. **Deuxième méthode.** On note p le plus petit entier tel que $u^p = 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $x \notin \operatorname{Ker} u^{p-1}$ et que, pour un tel x, la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est libre.

   (b) Conclure.

Exercice 18. ●◐○ – *Reste dans la division euclidienne*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux polynômes de degré $n+1$. On définit l'application $\phi : E \to E$ qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B.

1. Montrer que ϕ est linéaire.

2. Montrer que ϕ est un automorphisme ssi A et B sont premiers entre eux.

Exercice 19. ♣ – ●◐○ – *Suite exacte d'espaces vectoriels*

Soient $E_0, \dots, E_n$ des espaces vectoriels de dimension finie respectivement égale à $a_0, \dots, a_n$. On suppose qu'il existe n applications lineaires $f_0, \dots, f_{n-1}$ telles que, pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, f_k est une application lineaire de E_k dans E_{k+1} et

a) f_0 est injective ;

b) $\operatorname{Ker}(f_k) = \operatorname{Im}(f_{k-1})$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$;

c) f_{n-1} est surjective.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = 0$.

Exercice 20. ♣ – ●◐○ – *Interpolation de Hermite*

Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soient $y_1, \dots, y_n$ et $z_1, \dots, z_n$ des réels.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = y_i \text{ et } P'(x_i) = z_i.$$

2. Déterminer une formule explicite pour ce polynôme.

Exercice 21. ●◐○ – *Somme d'images, somme de noyaux*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v.$$

Montrer que les deux sommes sont directes.

Exercice 22. ●◐○ – *Endomorphismes à noyau contraint*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, soit G un sous-espace vectoriel de E. On définit $A = \{u \in \mathscr{L}(E, F) \mid G \subset \operatorname{Ker}(u)\}$.
Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$ et déterminer sa dimension.

Exercice 23. ♣ – ●◐○ – *Endomorphisme à noyau et image prescrits*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (F, G) pour qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = F$ et $\operatorname{Im} u = G$.

Exercice 24. ●●○ – *Commutant d'un projecteur*

Soit p un projecteur de rang r dans un espace vectoriel E de dimension finie n. On considère le commutant de p : $\mathscr{C}(p) = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ p = p \circ u\}$.
Montrer que $\mathscr{C}(p)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$. Déterminer sa dimension.

Exercice 25. ♣ – ●●○ – *Dimensions de sous-espaces d'endomorphismes*

Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang r. Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $A = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid v \circ u = 0\}$
2. $B = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v = 0\}$
3. $C = A \cap B$
4. $D = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v \circ u = 0\}$.

Exercice 26. ♣ – ●●○ – *Endomorphisme cyclique*

Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\left(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.
Montrer que le commutant de u est égal à $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Exercice 27. ●●○ – $fg - gf = \alpha g$

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $fg - gf = \alpha g$.

1. Déterminer $fg^k - g^k f$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que g est nilpotente.

Exercice 28. ♣ – ●●◐ – *Inégalité de Frobenius*

Soit u, v et w trois endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E. Montrer

$$\mathrm{rg}(uv) + \mathrm{rg}(vw) \leq \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(uvw).$$

Exercice 29. ♣ – ●●◐ – *Lemme des noyaux*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $P \wedge Q = 1$ et que $(PQ)(u) = 0$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}\big(P(u)\big) \oplus \mathrm{Ker}\big(Q(u)\big).$$

4 Formes linéaires, hyperplans, dualité

Exercice 30. ♣ – ●◐○ – *Formes linéaires de* $\mathbb{R}_n[X]$

Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère les formes linéaires $\phi_k \in E^*$, définies par $\forall P \in E, \phi_k(P) = P^{(k)}(0)$.
Montrer que la famille $(\phi_k)_{k=0}^n$ est une base de E^*.

Exercice 31. ♣ – ●◐○ – *Base du dual*

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient $\phi_1, \dots, \phi_n$ des formes linéaires sur E.
Montrer que $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est une base de E^* ssi $\displaystyle\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\,\phi_i = \{0\}$.

Exercice 32. ●◐○ – *Hyperplan évitant une partie dénombrable*

Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Montrer qu'il existe un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ tel que $H \cap D = \emptyset$.

Exercice 33. ●●○ – *Un résultat de dualité*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f_1, \dots, f_n \in E^*$. Soit $f \in E^*$ tel que

$$\forall x \in E, \big(f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0\big) \implies f(x) = 0.$$

Montrer que f est combinaison linéaire des $f_1, \dots, f_n$.

Exercice 34. ●●● – *Recouvrement dénombrable d'un espace par des hyperplans*

On admet que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.
   Montrer qu'il existe une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'hyperplans de E telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
   Montrer qu'il n'existe pas de suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'hyperplans de E telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

5 Autres exercices

Exercice 35. ♣ – ●◐○ – *Rang d'une famille de dérivées*

Soit $(f_1,\dots,f_n)$ une famille libre de fonctions dérivables $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(f_1',\dots,f_n') \geq n-1.$$

Exercice 36. ♣ – ●◐○ – *Polynômes de Hilbert*

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on pose $P_k = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$.

1. Montrer que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que, pour tout $m\in\mathbb{Z}$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $P_k(m)\in\mathbb{Z}$.

3. Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ prenant des valeurs entières sur chaque entier.

Exercice 37. ●◐○ – *Cardinal d'un corps fini*

Montrer que le cardinal d'un corps fini est de la forme p^n, où $p\in\mathbb{P}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 38. ♣ – ●●○ – *Idéaux à droite de $\mathscr{L}(E)$*

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on pose

$$\mathscr{I}_F = \{f\in\mathscr{L}(E) \mid \mathrm{Im}\, f \subset F\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{I}_F$ est un idéal à droite[1] de $\mathscr{L}(E)$.
   Calculer sa dimension en tant que sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

2. Montrer réciproquement que tout idéal à droite de $\mathscr{L}(E)$ est de la forme $\mathscr{I}_F$, pour un sous-espace vectoriel F de E.

3. Montrer que si $\mathscr{I}$ est un idéal à droite de $\mathscr{L}(E)$, il existe un projecteur $p\in\mathscr{I}$ tel que $\mathscr{I} = \{p\circ f, f\in\mathscr{L}(E)\}$.

[1] Dans un anneau A non commutatif, un idéal à droite est une partie $\mathscr{I}$ de A qui est un sous-groupe additif de A et qui vérifie : $\forall a\in A, \forall x\in\mathscr{I}, xa\in\mathscr{I}$.

Exercice 39. ♣ – ●●◐ – *Dénombrement sur un corps fini*

Soit E un espace vectoriel de dimension n, sur un corps fini $\mathbb{F}$ de cardinal q.

1. Déterminer les cardinaux de E et $\mathscr{L}(E)$.
2. Déterminer le nombre de bases de E. En déduire $|\mathrm{GL}(E)|$.
3. Déterminer le nombre de sous-espaces vectoriels de E de dimension p, où $p \in [\![1, n]\!]$.
4. Déterminer le nombre d'endomorphismes de E de rang r, où $r \in [\![1, n-1]\!]$.

Indications

Exercice 5. Pour 1., considérer la réunion d'une base de F et d'une base de G.

Exercice 8. Déterminer une inégalité entre $\dim \bigcap_{i=1}^{k} F_i$ et $\dim \bigcap_{i=1}^{k+1}$, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$.

Exercice 12. Pour 1., une application linéaire est entièrement déterminée par son image sur une partie génératrice. Pour 2., considérer $E = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 13. Écrire l'image de u comme somme directe de r droites.

Exercice 20. Pour 1., convertir le problème en une question de surjectivité d'une application linéaire. Pour 2., procéder comme avec les polynômes de Lagrange.

Exercice 22. Une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est connue sur G (car elle y est nulle). Elle est donc déterminée par son comportement sur un supplémentaire de G.

Exercice 29. Commencer par traduire l'hypothèse $P \wedge Q = 1$, pour en déduire une relation entre les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$.

Exercice 31. Un vecteur x est nul ssi $\ell(x) = 0$, pour toute forme linéaire ℓ. (pourquoi ?)

Exercice 36. Pour 3., écrire un tel polynôme dans la base de Hilbert.

Exercice 37. Montrer que tout corps fini contient un sous-corps isomorphe à un $\mathbb{F}_p$, et qu'il peut être vu comme un espace vectoriel sur ce sous-corps.