Algèbre linéaire - Matrices

1 Représentation matricielle

Exercice 1. ○○○ – *Calcul du noyau et de l'image*

Donner une base du noyau et de l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. ○○○ – *Représentation de projecteurs et symétries*

1. Dans $\mathbb{R}^3$, écrire les matrices dans la base canonique de
   (a) la projection sur le plan d'équation $x - 2y + 5z = 0$, parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, -1)$;
   (b) la symétrie par rapport à la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, -1)$, parallèlement au plan d'équation $x + 3y - 5z = 0$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est un projecteur, dont on déterminera le noyau et l'image. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à P est diagonale.
3. Soit $S = \begin{pmatrix} 3 & -16 & -12 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que S est une symétrie, dont on précisera les sous-espaces caractéristiques. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à S est diagonale.

Exercice 3. ◐○○ – *Calcul matriciel d'un antécédent*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\Delta(P) = P + P'$.
   (a) Déterminer la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) En déduire que Δ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et résoudre l'équation $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$.

Exercice 4. ♣ – ◐○○ – $u^2 = -\mathrm{Id}_E$

Soit E un espace vectoriel de dimension 2, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. ◐○○ – *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$

Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ la matrice de l'endomorphisme

$$u : P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

En déterminer son noyau et son image.

Exercice 6. ●○○ – *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_α défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $f_\alpha(P) = (1+X)P' - \alpha P$.

1. Montrer que f_α est linéaire et induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que la famille $\left(1, X+1, (X+1)^2, \ldots, (X+1)^n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
3. Donner la matrice de l'endomorphisme f_α de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que f_α soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 7. ♣ – ●◐○ – *Un endomorphisme de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$

Soit A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On considère $\phi_A : \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, $M \mapsto AM$.

1. Montrer que ϕ_A est linéaire.
2. Donner une CNS sur A pour que ϕ_A soit un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
3. Écrire la matrice de ϕ_A dans une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, que vous spécifierez.

Exercice 8. ♣ – ●◐○ – *Endomorphisme nilpotent d'indice maximal*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.
2. Déterminer les matrices de u, u^2,...,u^{n-1} dans cette base.
3. En déduire que $\left\{g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ u = u \circ g\right\} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1}\right)$.

Exercice 9. ●●○ – *Représentation des matrices nilpotentes*

1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure stricte, alors elle est nilpotente. Majorer son indice de nilpotence.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure stricte.

Exercice 10. ♣ – ●●○ – *Matrice des coefficients binomiaux*

Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de coefficients $m_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$, est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 11. ●●○ – *Représentation d'endomorphismes spéciaux*

Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Représenter, dans une bonne base, u quand il vérifie l'un des conditions suivantes :

1. $u^2 = 0$;
2. $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$;
3. $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u = E$;
4. $\operatorname{Ker} u$ est un hyperplan de E.

Exercice 12. ♣ – ●●○ – *Interpolation de Lagrange et matrice de Vandermonde*

Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. En considérant l'application linéaire $\phi : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto \big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big) \in \mathbb{K}^{n+1}$, montrer que la matrice $V \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$, de coefficients $v_{i,j} = x_{i-1}^{j-1}$, est inversible.

Exercice 13. ●●◐ – *Projecteurs sur un corps fini*

Déterminer le cardinal de $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p) \mid M^2 = M\}$.

2 Changement de base, matrices semblables, matrices équivalentes

Exercice 14. ♣ – ●○○ – *Calculs concrets*

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x-2y+2z, -x+y-2z, -2x+2y-3z)$.

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.
2. Donner une base du noyau de f.
3. Donner une équation de l'image de f.
4. On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = -2e_1 + e_3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$?
5. (a) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2, u_3.
   (b) Quelle est la matrice $C = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$?
6. Calculer P^{-1}.

Exercice 15. ●○○ – $A^2 = B^2 = I_n$

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^2 = B^2 = I_n$.
Montrer que A et B sont semblables ssi elles ont même trace.

Exercice 16. ●○○ – *Matrices semblables ?*

1. Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

2. Même question pour $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17. ♣ – ●●○ – *Sous-espaces stables par équivalence matricielle*

Déterminer les sous-espaces vectoriels $F \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ stables par équivalence matricielle : c'est-à-dire tels que :

$$\forall M \in F, \forall P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \forall Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K}), P^{-1}MQ \in F.$$

Exercice 18. ♣ – ●●○ – *Matrice semblable à une matrice de diagonale nulle*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M est semblable à une matrice dont la première colonne est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$ ssi M n'est pas une matrice scalaire.

2. En déduire que si M est de trace nulle, alors elle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

3 Autour du rang

Exercice 19. ♣ – ●◐○ – *Matrices de rang* 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une colonne C_i non nulle dans A et que toutes les autres colonnes sont des multiples de C_i.

2. En déduire qu'il existe $L \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, avec L et C non nulles, telle que $A = CL$.

3. Réciproquement, montrer que si A s'écrit $A = CL$, avec $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ non nulles, alors A est une matrice de rang 1.

4. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1, alors $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

Exercice 20. ●●○ – *Calculs de rang*

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

2. $B = \big(\max(i,j)\big)_{1 \le i,j \le n}$;

3. $C(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$;

4. $D = \big(\sin(i+j)\big)_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 21. ♣ – ●●○ – *Sous-espaces de matrices de rang* ≤ 1

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n, dont toutes les matrices sont de rang ≤ 1.

4 Autour de la trace

Exercice 22. ♣ – ●◐○ – *Résultats classiques*

1. Montrer qu'il n'existe pas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = I_n$.

2. Déterminer la trace d'un projecteur et d'une symétrie, en fonction de leurs sous-espaces caractéristiques.

3. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\ell(AB) = \ell(BA)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\ell = \lambda\,\mathrm{Tr}$.

Exercice 23. ●◐○ – *Sous-groupes finis de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On définit $S = \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{M\in G} M$.

1. Montrer que S est la matrice d'un projecteur.

2. En déduire que $\mathrm{Tr}(S) = 0 \iff S = 0$.

Exercice 24. ♣ – ●◐○ – *Traces d'endomorphismes matriciels*

Déterminer la trace des endomorphismes suivants :

1. $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;

2. $\psi_{A,B} : M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \mapsto AMB \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Exercice 25. ♣ – ●●○ – *Équations avec des traces*

Résoudre, en discutant selon la valeur de $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les équations d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $M + \mathrm{Tr}(M)A = B$;

2. $M + M^T = \mathrm{Tr}(M)A$.

Exercice 26. ♣ – ●●◐ – *Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible*

1. Pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\Phi_B : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{Tr}(AB) \in \mathbb{K}$. Montrer que $\Phi_B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ pour tout B, et que $B \mapsto \Phi_B$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

2. En déduire que, si H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut trouver $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \in H \iff \mathrm{Tr}(AM_0) = 0.$$

Une telle matrice M_0 est dite normale à H.

3. Soit $r \in [\![1, n]\!]$. On considère un hyperplan H telle que J_r est normale à H.
Montrer que H contient une matrice inversible.

4. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

5 Autres exercices

Exercice 27. ●○○ – Vect$\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\big)$

Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 28. ●○○ – *Un calcul de puissances*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $A^n \in F = \mathrm{Vect}(A, A^2)$.

2. Montrer qu'il existe U et V non nulles dans F telles que $AU = -U$ et $AV = 2V$.

3. En déduire A^n, pour tout $n \geq 1$.

Exercice 29. ♣ – ●◐○ – *Base de projecteurs*

Montrer qu'on peut trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices de projecteurs.

Exercice 30. ♣ – ●●○ – *Liberté d'une famille de fonctions*

Soit X un ensemble, soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.
Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre ssi il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leq i, j \leq n}$ est inversible.

Exercice 31. ●●○ – $f(AB) \leq \min\big(f(A), f(B)\big)$

Déterminer les fonctions $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telles que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) \leq \min\big(f(A), f(B)\big)$.

Exercice 32. ●●◐ – *Matrices à diagonale dominante*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum\limits_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$.

Montrer que A est inversible.

Exercice 33. ♣ – ●●◐ – *Matrices nilpotentes alignées*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A + \lambda B$ est nilpotente pour au moins $n+1$ valeurs de λ. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 34. ♣ – ●●◐ – *Décomposition LU*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la matrice $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}$ est inversible.

1. Montrer qu'il existe L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U triangulaire supérieure inversible, telles que $A = LU$.
2. Montrer que cette décomposition est unique.

Exercice 35. ♣ – ●●◐ – *Théorème de Skolem-Noether*

Soit ϕ un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire à la fois un automorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux).
Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\phi(M) = PMP^{-1}$. Réciproque ?

Indications

Exercice 7. Pour 2., montrer que ϕ_A est un automorphisme ssi A est inversible. Pour 3., la matrice de ϕ_A est une matrice 4×4 ; bien préciser l'ordre dans les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 8. Considérer un x_0 tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$ et montrer que la famille correspondante est libre.

Exercice 10. Interpréter cette matrice comme représentant un certain endomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$

Exercice 13. La donnée d'un projecteur est équivalente à celle d'une décomposition de l'espace comme somme directe de deux ssev.

Exercice 24. Représenter ces endomorphismes dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; bien ordonner cette base.

Exercice 29. Considérer des projecteurs simples construits à partir des matrices élémentaires.

Exercice 35. On pourra considérer l'image par ϕ des matrices élémentaires $E_{i,j}$.