# DM 18A - Asymptotique - technique

Pour la mémorisation des développements limités et le calcul effectif des DL et développements asymptotiques, on conseille un entraînement sur les exercices les plus calculatoires du TD (notamment 7, 9, 10). Revoir aussi si besoins les exercices 3 et 4 pour des équivalents élémentaires. De nombreux exercices corrigés sont aussi disponibles dans le cahier de calcul.

## 1 Calculs – DS6 2022-2023

1. Déterminer la limite en 0 de $x \mapsto \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$.
2. Déterminer le développement asymptotique en $+\infty$ de
$$f : x \mapsto x\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1}\right),$$
à la précision $o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de $f$ ?

## 2 Une suite implicite – exercice 15 du TD

*Si besoin, se reporter aux corrections des exercices 14 et 17 du TD.*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + e^x = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite puis un équivalent de $x_n$.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de $x_n$.

## 3 Fonction W de Lambert – DS6 2022-2023

*Si besoin, se reporter aux corrections des exercices 19 et 20 du TD.*

On note $f$ la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(t) = te^t$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection $\mathscr{C}^\infty$ de $[-1, +\infty[$ vers un intervalle $J$ que l'on déterminera.

On note $W : J \to [-1, +\infty[$ la bijection réciproque de $f$ : c'est la *fonction de Lambert*[1].

2. Montrer que, au voisinage de $+\infty$,
$$W(x) = \ln x - \ln\left(\ln x\right) + O\left(\frac{\ln\left(\ln x\right)}{\ln x}\right).$$
3. Justifier que $W$ admet un développement limité à tout ordre en 0.
Calculer ce développement limité à la précision $o(x^3)$.

[1] d'après Jean-Henri Lambert, 1728-1777