DM 18A - Asymptotique - technique

1 Calculs – DS6 2022-2023

1. On note $g(x) = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$. On a
$$g(x) = \exp\left(\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right).$$
On calcule :
$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)} = 1+\frac{x^2}{6}+o(x^2).$$
On en déduit que $\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \ln\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = \frac{x^2}{6}+o(x^2)$. De plus,
$$\frac{\sin x}{x-\sin x} \sim \frac{x}{\frac{x^3}{6}} = \frac{6}{x^2}.$$
Donc, $\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \sim \frac{6}{x^2}\times\frac{x^2}{6} = 1$.
Par composition de limites, on en déduit que $\lim\limits_0 g = e$.

2. On commence par écrire le développement limité de $\sqrt{1+u}$ à la précision $o(u^3)$.
$$\sqrt{1+u} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+o(u^3).$$
On calcule :
$$\begin{aligned}f(x) &= x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\\ &= x^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{2}{x}-\frac{1}{8}\frac{4}{x^2}+\frac{1}{16}\frac{8}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)\\ &= x-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$
On en déduit que la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$. De plus, l'asymptote est en-dessous de cette courbe (au voisinage de $+\infty$).

2 Une suite implicite – exercice 15 du TD

1. La fonction $f : x \mapsto x+e^x$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de limites $\pm\infty$ en $\pm\infty$. Comme elle est continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n a un unique antécédent, qu'on note x_n.

2. La suite (x_n) est strictement croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f^{-1}(n)$ et que f^{-1} est strictement croissante (car bijection réciproque de f, qui est strictement croissante). Donc, par le théorème de la limite monotone, (x_n) admet une limite. Si celle-ci était finie, (x_n) serait majorée par un réel M. On aurait alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = x_n + e^{x_n} \leq C + e^C$, ce qui est absurde. Donc, (x_n) tend vers $+\infty$.
   Comme $\lim x_n = +\infty$, on a par croissance comparée $n = x_n + e^{x_n} \sim e^{x_n}$. Ainsi, $e^{x_n} = n + o(n)$. On passe au logarithme et on factorise par n :
   $$x_n = \ln\big(n(1+o(1))\big) = \ln n + \ln\big(1+o(1)\big) = \ln n + o(1).$$
   En particulier $x_n \sim \ln n$. (*On est en fait plus précis, puisqu'on sait que le terme suivant dans un développement asymptotique de x_n tend en fait vers* 0.)

3. On note $y_n = x_n - \ln n$. On substitue dans l'égalité $x_n + e^{x_n} = n$ définissant x_n :
   $$\ln n + y_n + e^{\ln n + y_n} = n.$$
   On obtient :
   $$\ln n + y_n + ne^{y_n} = n.$$
   Mais on a vu qu'en fait $y_n = x_n - \ln n = o(1)$. On peut donc développer e^{y_n} :
   $$e^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n).$$
   Donc,
   $$\ln n + y_n + ny_n + o(ny_n) = 0.$$
   On peut absorber le terme y_n dans le $o(ny_n)$. Il vient ainsi :
   $$ny_n + o(ny_n) = -\ln n.$$
   D'où $y_n \sim -\dfrac{\ln n}{n}$. Et donc $x_n = \ln n - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

3 Fonction W de Lambert – DS6 2022-2023

1. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$. On a $f'(t) = (t+1)e^t \geq 0$, avec égalité seulement en -1. Donc f est strictement croissante. De plus, $f(-1) = -e^{-1}$ et $\lim\limits_{+\infty f} f = +\infty$.
   Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.

2. Soit $x \geq -e^{-1}$. Par définition, on a $W(x)e^{W(x)} = x$. On passe au logarithme :
   $$W(x) + \ln W(x) = \ln x.$$
   Des variations de f, on déduit que $\lim\limits_{+\infty} W = +\infty$. Donc, $\ln W(x) = o(W(x))$. Donc $W(x) \sim \ln x$ en $+\infty$.
   Notons maintenant $y(x) = W(x) - \ln x$. On réécrit l'équation précédente :
   $$y(x) + \ln x + \ln(\ln x + y(x)) = \ln x.$$

Et $y(x) = o(\ln x)$ en $+\infty$. Donc,

$$y(x) + \ln(\ln x) + \ln(1 + \frac{y(x)}{\ln x}) = 0.$$

Comme $\dfrac{y(x)}{\ln x}$ tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit :

$$y(x) + \ln(\ln x) + O\left(\frac{y(x)}{\ln x}\right) = 0.$$

Le terme $O\left(\dfrac{y(x)}{\ln x}\right)$ est borné et $\ln(\ln x)$ tend vers $+\infty$. Donc, $y(x) \sim -\ln(\ln x)$. Et on peut réécrire plus précisément :

$$y(x) = -\ln(\ln x) + O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right).$$

Finalement :

$$W(x) = \ln x - \ln(\ln x) + O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right).$$

3. La dérivée de f ne s'annule qu'en -1, d'image $-e^{-1}$ par f. Donc W est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$. En particulier, elle admet un développement limité à tout ordre en 0. On a $f(0) = 0$, donc $W(0) = 0$. On peut donc écrire $W(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$, où a, b, c sont à déterminer.

   Pour $x \geq -e^{-1}$, on a l'égalité $W(x)e^{W(x)} = x$. Donc,

   $$(ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3))\exp(ax + bx^2 + o(x^2)) = x.$$

   On développe :

   $$x(a + bx + cx^2 + o(x^2))(1 + (ax + bx^2) + \frac{1}{2}(ax + bx^2)^2 + o(x^2)) = x.$$

   $$x(a + (a^2 + b)x + (c + 2ab + \frac{a^2}{2})x^2 + o(x^2)) = x.$$

   On en déduit que $a = 1$, $a^2 + b = 0$ et $c + 2ab + \dfrac{a^2}{2} = 0$. Donc $a = 1$, $b = -1$ et $c = \dfrac{3}{2}$. Donc,

   $$W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$