

# 17 - Analyse asymptotique

Jeremy Daniel

## 1 Relations de comparaison

$I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  est un point adhérent à  $I$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1.1 Généralités

DÉFINITION 1.1 (Relations de comparaison pour les fonctions)

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ . On dit que

- $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe  $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ , bornée au voisinage de  $a$  telle que  $f = g \times u$  au voisinage de  $a$ .
- $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{K}$ , de limite nulle en  $a$  telle que  $f = g \times \varepsilon$  au voisinage de  $a$ .
- $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe  $u : I \rightarrow \mathbb{K}$  de limite 1 en  $a$  telle que  $f = g \times u$  au voisinage de  $a$ .

NOTATION 1.2

On écrit respectivement  $f = O(g)$ ,  $f = o(g)$  et  $f \sim (g)$ . Quand le contexte est clair, on pourra sous-entendre le point où la comparaison est faite, ou bien l'écrire à côté :  $f = O(g)$  en  $a$ /au voisinage de  $a$ .

REMARQUE 1.3

Pour les notations  $o$  et  $O$ , seule la valeur absolue (ou le module) des fonctions a une importance :  $f = O(g) \iff |f| = O(|g|)$  et  $f = o(g) \iff |f| = o(|g|)$ .

PROPOSITION 1.4

On suppose que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ . Alors :

- $f = O(g)$  en  $a$  ssi  $\frac{f}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$ .
- $f = o(g)$  en  $a$  ssi  $\frac{f}{g}$  tend vers 0 en  $a$ .
- $f \sim g$  en  $a$  ssi  $\frac{f}{g}$  tend vers 1 en  $a$ .

**REMARQUE 1.5**

On suppose que  $g$  est définie en  $a$ , que  $g(a) = 0$  mais que  $g$  ne s'annule pas ailleurs qu'en  $a$ , sur un voisinage de  $a$ . Alors  $\frac{f}{g}$  est bien définie sur un voisinage épointé de  $a$  (voisinage privé de  $a$ ). Alors, en ajoutant la condition  $f(a) = 0$  (nécessaire), les équivalences précédentes restent vraies.

**ATTENTION !**

La plupart des fonctions considérées vérifient cette condition. Des contre-exemples sont donnés par  $\cos$  en  $+\infty$  ou  $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  en  $0$ .

**PROPOSITION 1.6** (Cas particulier des constantes)

On a les équivalences suivantes (où  $\ell \in \mathbb{R}^*$ ) :

- $f = O(1)$  ssi  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  ;
- $f = o(1)$  ssi  $f$  tend vers  $0$  en  $a$  ;
- $f \sim \ell$  ssi  $\lim_a f = \ell$ .

**ATTENTION !**

L'équivalence  $f \sim 0$  en  $a$  signifie que  $f$  est identiquement nulle sur un voisinage de  $a$ . Cela n'arrivera jamais en pratique !

**PROPOSITION 1.7** (Équivalents et limites)

Si  $f \sim g$  en  $a$  et si  $\lim_a f = \ell \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim_a g = \ell$ .

**PROPOSITION 1.8** (Substitution fonction/fonction)

Soit  $h : I \rightarrow J$  telle que  $\lim_a h = b$  existe.

- Si  $f = O(g)$  en  $b$ , alors  $f \circ h = O(g \circ h)$  en  $a$  ;
- Si  $f = o(g)$  en  $b$ , alors  $f \circ h = o(g \circ h)$  en  $a$  ;
- Si  $f \sim g$  en  $b$ , alors  $f \circ h \sim g \circ h$  en  $a$ .

**PROPOSITION 1.9** (Substitution fonction/suite)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $I$ , de limite  $a$ .

- Si  $f = O(g)$  en  $a$ , alors  $f(u_n) = O(g(u_n))$  en  $+\infty$  ;
- Si  $f = o(g)$  en  $a$ , alors  $f(u_n) = o(g(u_n))$  en  $+\infty$  ;
- Si  $f \sim g$  en  $a$ , alors  $f(u_n) \sim g(u_n)$  en  $+\infty$ .

**PROPOSITION 1.10** (Croissances comparées)

Soit  $a > 0$ , soit  $b > 0$ .

- En  $+\infty$  :  $(\ln x)^b = o(x^a)$  et  $x^b = o(e^{ax})$ .
- En  $0$  :  $|\ln x|^b = o(x^{-a})$ .
- En  $-\infty$  :  $e^{ax} = o(|x|^{-b})$ .

ATTENTION !

Si  $0 \leq a_1 < a_2$ , alors  $x^{a_1} = o(x^{a_2})$  en  $+\infty$  mais  $x^{a_2} = o(x^{a_1})$  en 0.

**PROPOSITION 1.11** (Règles de calcul  $o$  et  $O$ )

On a les règles de calcul suivantes :

- $f = o(g) \implies f = O(g)$  ;
- $f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2) \implies f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$  ;
- $f_1 = O(g_1), f_2 = o(g_2) \implies f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$  ;
- $f_1 = O(g), f_2 = O(g) \implies f_1 + f_2 = O(g)$  ;
- $f_1 = o(g), f_2 = o(g) \implies f_1 + f_2 = o(g)$  ;
- $f = O(g), g = O(h) \implies f = O(h)$  ;
- $f = O(g), g = o(h) \implies f = o(h)$  ;
- $f = o(g), g = O(h) \implies f = o(h)$ .

**REMARQUE 1.12**

Comme  $f_1 = O(f_1)$ , on a en particulier  $f_2 = O(g_2) \implies f_1 f_2 = O(f_1 g_2)$  et  $f_2 = o(g_2) \implies f_1 f_2 = o(f_1 g_2)$ . Dans un produit, on peut donc faire entrer les fonctions dans un  $o/O$ .

**REMARQUE 1.13**

Toutes ces propriétés sont vraies aussi avec les suites.

**PROPOSITION 1.14** (Équivalents et  $o$ )

Au voisinage de  $a$ ,  $f \sim g \iff f = g + o(g)$ .

## 1.2 Équivalents - la théorie

ATTENTION !

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de 0. Les assertions  $f(x) \sim 1 + x$  et  $f(x) - 1 \sim x$  (en 0) ne sont pas équivalentes :

- $f(x) \sim 1 + x$  en 0 signifie que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1+x} = 1$ . C'est équivalent à demander que  $\lim_0 f = 1$ , c'est-à-dire  $f(x) \sim 1$  en 0.
- $f(x) - 1 \sim x$  en 0 signifie que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$ . Cela signifie (si  $f$  est définie en 0) que  $f(0) = 1$  et que  $f$  est dérivable en 0, de dérivée  $f'(0) = 1$ .

**THÉORÈME 1.15** (Développement limité à l'ordre 1)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  dérivable en  $a \in I$ . Alors, en  $a$  :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a).$$

Si de plus  $f'(a) \neq 0$ , on a  $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$  en  $a$ .

**PROPOSITION 1.16** (Équivalents usuels en 0)

On a les équivalents suivants en 0 (où  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ )

- |                     |                                    |                                    |
|---------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| - $e^x - 1 \sim x$  | - $\tan x \sim x$                  | - $\operatorname{Arctan} x \sim x$ |
| - $\ln(1+x) \sim x$ | - $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ | - $\operatorname{sh} x \sim x$     |
| - $\sin x \sim x$   | - $\operatorname{Arcsin} x \sim x$ | - $\operatorname{th} x \sim x$ .   |

#### EXEMPLE 1.17

La plupart du temps, on applique la proposition en 0. Mais on a par exemple :

$$\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sim -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

au voisinage de  $\pi/4$ .

#### PROPOSITION 1.18 (Propriétés conservées par équivalence)

Soient  $f$  et  $g$ , équivalentes en  $a$ .

- Si  $f$  est positive (resp. strictement positive) au voisinage de  $a$ , alors  $g$  aussi.
- Si  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  (resp. sauf en  $a$ ), alors  $g$  non plus (resp. sauf en  $a$ ).

#### ATTENTION !

La monotonie des fonctions n'est pas conservée. Par exemple, si  $f(x) = x$  et  $g(x) = x + 2\sin x$ ,  $f \sim g$  en  $+\infty$ ,  $f$  est croissante (au voisinage de  $+\infty$ ), mais pas  $g$ .

### 1.3 Équivalents - la pratique

#### 1.3.1 Produit, quotient, puissance

##### PROPOSITION 1.19

Soient  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  définies sur  $I$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors, au voisinage de  $a$  :

- Si  $f_1 \sim g_1$  et  $f_2 \sim g_2$ , alors  $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$  ;
- Si  $f_1 \sim g_1$  et  $f_2 \sim g_2$ , alors  $\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2}$  (si les  $g_i$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$ )
- Si  $f_1 \sim g_1$ , alors  $f_1^\alpha \sim g_1^\alpha$  (si  $f_1, g_1 \geq 0$ ).

#### EXERCICE 1.20

Équivalents en 0 de  $\cos x - 1$  et de  $\frac{\sin x}{(\cos x - 1) \ln(1+x)^2}$ .

#### 1.3.2 Composition

#### ATTENTION !

En général,  $f \sim g$  en  $a$  n'implique pas  $\phi(f) \sim \phi(g)$  en  $a$ . Considérer par exemple  $x \sim x+1$  en  $+\infty$  et  $\exp$  ; ou bien  $1+x \sim 1$  en 0 et  $\ln$ .

#### PROPOSITION 1.21 (Cas de l'exponentielle)

$e^f \sim e^g$  en  $a$  ssi  $\lim_a (f - g) = 0$ .

**PROPOSITION 1.22** (Cas du logarithme)

Soient  $f, g \geq 0$  au voisinage de  $a$ . Si  $f \sim g$ , et si  $f$  (et donc  $g$ ) tend vers  $0^+$  ou  $+\infty$  en  $a$ , alors  $\ln f \sim \ln g$  en  $a$ .

**1.3.3 Somme**

ATTENTION !

On ne peut pas en général sommer les équivalents. Ainsi,  $x \sim x - x^2$  en 0 mais  $(x - x^2) - x = -x^2$  n'est pas équivalent à  $(x - x) = 0$ . Mieux vaut réécrire les équivalents avec des petits  $o$  quand on doit faire une somme.

**EXERCICE 1.23**

Équivalent de  $\ln(1 + x) + \sin x$  en 0. Puis de  $e^x - 1 - \sin x$ .

**1.3.4 Substitution****EXERCICE 1.24**

Équivalent en 0 de  $\sin(e^x - 1)$ .

## 2 Développements limités

$I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  adhérent à  $I$ .

### 2.1 Généralités

**DÉFINITION 2.1** (Développement limité en  $a$ )

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ , soit  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  s'il existe  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

**REMARQUE 2.2**

$f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  ssi  $g : x \mapsto f(a + x)$ , définie sur  $J = I - a = \{x \in \mathbb{R} \mid a + x \in I\}$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0. En pratique, on peut toujours se ramener à des développements limités en 0, ce qu'on fait dans la suite.

**PROPOSITION 2.3** (Unicité du développement limité)

Si  $f$  admet en 0 deux développements limités à l'ordre  $n$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \text{ et } f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n),$$

alors  $(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_n)$ .

**DÉFINITION 2.4** (Partie régulière)

Avec les notations précédentes, on appelle partie régulière du développement limité à l'ordre  $n$  en  $0$  de  $f$  la fonction polynomiale  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

**COROLLAIRE 2.5** (DL et parité)

On suppose que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $0$ , de partie régulière

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

- Si  $f$  est paire, les  $a_k$  sont nuls pour  $k$  impair.
- Si  $f$  est impaire, les  $a_k$  sont nuls pour  $k$  pair.

**PROPOSITION 2.6** (DL à un ordre inférieur)

On suppose que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  de partie régulière  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Alors, pour tout  $i \leq n$ ,  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $i$  en  $0$ , de

partie régulière  $x \mapsto \sum_{k=0}^i a_k x^k$ .

**PROPOSITION 2.7** (Parties réelle et imaginaire d'un DL)

On suppose que  $f$  est à valeurs complexes. Elle admet un développement limité à l'ordre  $n$  ssi  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  ont un développement limité à l'ordre  $n$ . Dans ce cas, si  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ , les développements limités de  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont donnés par :

$$(\operatorname{Re} f)(x) = \sum_{k=0}^n (\operatorname{Re} a_k) x^k + o(x^n) \text{ et } (\operatorname{Im} f)(x) = \sum_{k=0}^n (\operatorname{Im} a_k) x^k + o(x^n).$$

## 2.2 Développements limités et dérivation

**PROPOSITION 2.8** (DL à l'ordre 0)

$f$  admet un développement limité à l'ordre 0 en  $0$  ssi  $f$  admet une limite finie en  $0$ . Dans ce cas,  $a_0 = \lim_0 f$ .

**REMARQUE 2.9**

Selon que  $f$  est définie ou non en  $0$ , cela revient à dire que  $f$  est continue en  $0$  ou qu'elle admet un prolongement par continuité en  $0$ .

**PROPOSITION 2.10** (DL à l'ordre 1)

$f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, de partie régulière  $x \mapsto a_0 + a_1x$  ssi (le prolongement continu de)  $f$  est dérivable en 0, avec  $f(0) = a_0$  et  $f'(0) = a_1$ .

ATTENTION !

On arrête là les équivalences. Considérons  $f_k : x \mapsto x^k \sin\left(\frac{1}{x^k}\right)$ , pour  $k \geq 3$ . Alors  $f_k(x) = o(x^{k-1})$  donc  $f$  admet un DL en 0 à l'ordre  $k - 1$ . Mais la dérivée de  $f$  n'est pas continue en 0 ; en particulier  $f \notin \mathcal{D}^{k-1}$ .

REMARQUE 2.11

L'exemple précédent montre aussi que si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0, il n'est pas vrai en général que  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n - 1$  en 0. On a cependant la réciproque.

**THÉORÈME 2.12** (Primitivation des DL)

On suppose que  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est dérivable sur  $I$  et que sa dérivée  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 :  $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ . Alors,  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n + 1$  en 0, donné par :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o(x^{n+1}).$$

EXERCICE 2.13

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de  $\tan$  en 0.

## 2.3 Formule de Taylor-Young

**THÉORÈME 2.14** (Formule de Taylor-Young)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ . On suppose que  $f$  est  $n - 1$  fois dérivable et que  $f^{(n-1)}$  est dérivable en 0. Alors,  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

REMARQUE 2.15

Dans le programme, on suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$ .

REMARQUE 2.16

En  $a \neq 0$ , la formule de Taylor-Young est

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

**PROPOSITION 2.17** (DL usuels)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a les développements limités suivants en 0 :

$$\begin{aligned}
- \exp(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n); \\
- \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n); \\
- \cos(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \\
- \sin(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \\
- \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4); \\
- \operatorname{ch}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \\
- \operatorname{sh}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \\
- \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n); \\
- (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \text{ où } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}; \\
- \operatorname{Arctan} x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).
\end{aligned}$$

**REMARQUE 2.18**

Comme on connaît l'ordre de grandeur du premier terme négligé, on peut être légèrement plus précis en remplaçant le  $o$  par un  $O$ . Par exemple,  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$  est plus précis que  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ .

**EXERCICE 2.19**

Déterminer le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de  $\operatorname{Arcsin}$ .

**2.4 Pratique****2.4.1 DL d'une somme****EXERCICE 2.20**

DL à l'ordre 3 en 0 de  $e^x - \tan x + \cos x$ .

### 2.4.2 DL d'un produit

DÉFINITION 2.21 (Forme normalisée d'un DL)

Soit  $f$  admettant un DL à l'ordre  $n$  de partie régulière  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  non nulle. On note  $p = \min\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid a_k \neq 0\}$ . La forme normalisée du DL à l'ordre  $n$  de  $f$  est :

$$f(x) = x^p \left( \sum_{k=p}^n a_k x^{k-p} + o(x^{n-p}) \right).$$

MÉTHODE 2.22

Supposons qu'on souhaite le DL à l'ordre  $n$  d'un produit  $fg$ . Si les formes normalisées des DL de  $f$  et  $g$  commencent respectivement à  $x^p$  et  $x^q$ , alors les DL de  $f$  et  $g$  à l'ordre  $n - q$  et  $n - p$  respectivement suffisent pour le calcul.

EXERCICE 2.23

DL à l'ordre 4 en 0 de  $\tan x \times \ln(1 + x)$ .

EXERCICE 2.24

DL à l'ordre 5 en 0 de  $(\cos x - 1)(\sin x - x)$ .

### 2.4.3 DL d'un quotient

MÉTHODE 2.25

On se donne un quotient  $\frac{f}{g}$  dont on cherche le développement limité à l'ordre  $n$  en 0. On suppose que  $g(0)$  est non nul. Démarche :

- On se ramène à un dénominateur tendant vers 1 (en factorisant par une constante) et on écrit ce dénominateur sous la forme  $1 - u$  (donc avec  $\lim_{u \rightarrow 0} u = 0$ ).
- On calcule le DL de  $\frac{1}{1 - u}$  par substitution dans le DL de  $\frac{1}{1 - x}$ .
- On est ramené au DL d'un produit.

EXERCICE 2.26

DL à l'ordre 5 en 0 de  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ .

EXERCICE 2.27

DL à l'ordre 3 en 0 de  $\frac{1}{1 + e^x}$ .

MÉTHODE 2.28

Si  $g(0) = 0$ , on n'aura pas de DL en général (penser à  $\frac{1}{x}$ ). Plus précisément si  $f(x) \sim a_p x^p$  et  $g(x) \sim b_q x^q$ , alors  $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}$  et on aura un DL ssi  $p \geq q$ . Cependant, même dans le

cas où  $p < q$ , on peut multiplier  $\frac{f}{g}$  par  $x^{q-p}$ , obtenir un DL pour cette fonction et diviser à la fin par  $x^{q-p}$ . On obtient un développement asymptotique de  $\frac{f}{g}$  en 0 (dans ce cas, comme un développement limité, mais en commençant avec des puissances négatives de  $x$ ).

EXERCICE 2.29

Étude en 0 de  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^3 - 1 + \cos x}$ .

#### 2.4.4 DL d'une composée

MÉTHODE 2.30

On cherche le DL d'une composition  $g \circ f$  en 0. On suppose que  $f(0) = 0$ . Alors le DL s'obtient par substitution.

EXERCICE 2.31

DL à l'ordre 3 en 0 de  $\ln(1 + \sin x)$ .

MÉTHODE 2.32

Si  $f(0)$  n'est pas égal à 0, on a deux possibilités : ou bien travailler l'expression pour se ramener à des DL en 0, ou bien utiliser le DL de  $g$  ailleurs qu'en 0.

EXERCICE 2.33

DL à l'ordre 3 en 0 de  $\frac{1}{2+x}$ , puis de  $\ln(1 + e^x)$ .

REMARQUE 2.34

Les développements limités de  $\exp$  et  $\ln$  s'obtiennent rapidement à partir de ceux de référence.

– Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Alors, au voisinage de  $a$  :

$$\exp(x) = \exp(a) \exp(x - a) = \exp(a) \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} + o((x - a)^n).$$

– Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors au voisinage de  $a$  :

$$\ln(x) = \ln(a) + \ln\left(1 + \left(\frac{x - a}{a}\right)\right) = \ln a + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(x - a)^k}{a^k k} + o((x - a)^n).$$

## 3 Applications

### 3.1 Calculs de limites

EXERCICE 3.1

Déterminer les limites suivantes :

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x^2)}; \quad - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - x \cos x - 2x}{\sin^5 x}; \quad - \lim_n e^{-\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

## 3.2 Tangentes et asymptotes

### 3.2.1 Position relative d'une tangente

#### MÉTHODE 3.2

Supposons qu'au voisinage de  $a$ ,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + a_{k_0}(x - a)^{k_0} + o((x - a)^{k_0}),$$

avec  $a_{k_0} \neq 0$ . Alors, la parité de  $k_0$  et le signe de  $a_{k_0}$  permettent de déterminer le signe (au voisinage de  $a$ ) de  $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ , c'est-à-dire la position relative de la courbe représentative de  $f$  et de sa tangente en  $a$ . On a en effet :  $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \sim a_{k_0}(x - a)^{k_0}$ . Donc :

- Si  $k_0$  est pair, la courbe est au-dessus de sa tangente si  $a_{k_0} > 0$ , en dessous si  $a_{k_0} < 0$ .
- Si  $k_0$  est impair, la tangente traverse la courbe (on dit que  $a$  est un point d'inflexion) ; elle est en dessous puis au-dessus si  $a_{k_0} > 0$ , au-dessus puis en dessous si  $a_{k_0} < 0$ .

#### REMARQUE 3.3

Dans le cas particulier où  $a$  est un point critique de  $f$ , cela revient à étudier si  $a$  est un extremum local et, le cas échéant, si c'est un minimum ou maximum local.

#### EXERCICE 3.4

Étude de  $f(x) = e^x + \ln(1 + x)$  en 0.

### 3.2.2 Étude des asymptotes

#### DÉFINITION 3.5 (DL en $+\infty$ )

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $+\infty$ . On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $+\infty$  si la fonction  $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $0^+$ .

#### REMARQUE 3.6

On a alors  $f(x) = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + \dots + a_n \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ , en  $+\infty$ .

#### MÉTHODE 3.7

On dit que la droite affine  $x \mapsto ax + b$  est asymptote oblique à  $f$  en  $+\infty$  si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Si la fonction  $x \mapsto f(x) - (ax + b)$  admet un développement limité en  $+\infty$ , on peut déterminer la position relative de la courbe représentative de  $f$  et de son asymptote (qui dépendra uniquement du signe du premier coefficient non nul du DL).

### EXERCICE 3.8

Étude en  $+\infty$  de  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ .

## 3.3 Série harmonique et formule de Stirling

REMARQUE 3.9 (Développement asymptotique)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. Si on peut écrire

$$u_n = \sum_{k=1}^N a_k v_{k,n} + o(v_N),$$

où les  $(v_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$  sont des *suites de référence* telles que  $v_{k+1,n} = o(v_{k,n})$  et les  $a_k$  des constantes, on dit qu'on a écrit un développement asymptotique de  $(u_n)$  à  $N$  termes.

Chaque terme de la somme affine la connaissance du comportement asymptotique de  $(u_n)$ .

**THÉORÈME 3.10** (Série harmonique)

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Il existe une constante  $\gamma^1$  telle que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**THÉORÈME 3.11** (Formule de Stirling)

On a l'équivalent suivant :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

---

1. Constante d'Euler-Mascheroni,  $\gamma \cong 0,577$