

Suites récurrentes

1 Généralités

Exercice 1. ●○○ – Étude générale

Étudier la convergence des suites récurrentes suivantes :

1. $u_{n+1} = \frac{2 + u_n^2}{3}$

5. $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ ($u_0 \in [0, 2]$)

2. $u_{n+1} = e^{-u_n}$

6. $u_{n+1} = \frac{3}{2 + u_n^2}$

3. $u_{n+1} = \sin u_n$

7. $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$, où $u_0 > 1$

4. $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$, où $u_0 \in [0, 1]$

8. $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ ($u_0 > 0$)

Exercice 2. ♣ – ●●○ – Produit de racines itérées

Soit $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}$. Étudier la suite de terme général $v_n = \prod_{k=1}^n u_k$.

Exercice 3. ♣ – ●●○ – Suite logistique, cas limite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$.

1. Montrer que si $u_0 \notin [0, 1]$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.
2. On suppose que $u_0 \in [0, 1]$ et on considère $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u_0 = \sin^2 \theta$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n sous la forme $\sin^2 \theta_n$. En déduire l'ensemble des valeurs u_0 pour lesquelles (u_n) converge.
3. Montrer que l'ensemble des valeurs de u_0 pour lesquelles (u_n) est périodique est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 4. ♣ – ●●○ – Moyenne de Cesàro d'une suite récurrente

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1}$$

est bornée. Montrer que f admet un point fixe.

2 Asymptotique

Exercice 5. ♣ – ●●○ – Différentes méthodes pour l'obtention d'un équivalent

On considère une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 3u_n^2$.

1. Montrer que, si $u_0 \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$, alors u est à valeurs strictement positives et tend vers 0.

On suppose dans la suite de l'exercice que $u_0 \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$.

2. Équivalent conjectural.

- (a) Pour tous $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, on note $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\lambda n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Donner un équivalent de $(v_{n+1} - v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et de $(-3v_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- (b) Résoudre (à la physicienne) l'équation différentielle $y' + 3y^2 = 0$.
- (c) Utiliser l'une ou l'autre des questions précédentes pour conjecturer un équivalent de (u_n) .

3. Équivalent, par comparaison à une intégrale.

- (a) Montrer que $\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dt}{t^2}$ converge vers 3 quand $n \rightarrow +\infty$.
- (b) En utilisant le théorème de Cesàro, donner un équivalent de $\left(\int_{u_n}^{u_0} \frac{dt}{t^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire un équivalent de (u_n) .

4. Développement asymptotique, via une suite auxiliaire.

On définit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{3u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (a) Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_{n+1} - w_n) = 1$ et en déduire à nouveau un équivalent de u .
- (b) Montrer $(w_{n+1} - (n+1)) - (w_n - n) \sim \frac{1}{n}$.

Les deux questions suivantes demandent davantage de connaissances.

- (c) Montrer que $w_n - n \sim \ln n$.
- (d) En déduire un développement asymptotique à deux termes de (u_n) .

Exercice 6. ●●○ – Équivalent de $u_{n+1} = \sin(u_n)$

Soient $c > 0$ et $f : [0, c] \rightarrow [0, c]$ une fonction continue admettant en 0 un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha),$$

où $a > 0$ et $\alpha > 1$.

1. Montrer que si u_0 est assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0.

On suppose cette condition satisfaite dans la suite.

2. Déterminer $\beta \in \mathbb{R}^*$ tel que la suite $(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta)$ ait une limite finie non nulle.
3. En déduire un équivalent de (u_n) .
4. Appliquer à une suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Exercice 7. ●●●○ – Équivalents de suites récurrentes

Donner la limite et un équivalent des suites suivantes, définies par récurrence :

1. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \quad (u_0 > 0)$
2. $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2} \quad (u_0 > 0)$
3. $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \quad (u_0 > 0)$
4. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\ln u_n} \quad (u_0 > 1)$

Exercice 8. ♣ – ●●●○ – $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. Montrer que $u_n = n + O(1)$.
2. En déduire que $u_{n+1} = n + \frac{1}{2} + o(1)$ et donner un développement asymptotique de u à la précision $o(1)$.
3. Obtenir un développement asymptotique de u à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 9. ♣ – ●●●● – Développement asymptotique d'une suite récurrente

Donner un développement asymptotique à deux termes d'une suite définie par récurrence par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Indications

Exercice 4. Si f n'a pas de point fixe, quelle propriété a la suite (u_n) ?