Analyse asymptotique

1 Relations de comparaison

Exercice 1. ○○○ – *Ordres de grandeur*

Classer par ordre de négligeabilité les suites ou fonctions suivantes :

a) n^2, $n\ln n$, $\dfrac{e^n}{n^2}$, n^{-3}, 1, $\dfrac{\ln n}{n^4}$, $n^{\ln n}$, n ;

b) x^2, $\sqrt{x}$, $x\ln x$, $x(\ln x)^2$, e^{3x}, 5^x, $\dfrac{2}{x^4}$, $4x^3$, au voisinage de 0 ;

c) x^2, $\sqrt{x}$, $x\ln x$, $x(\ln x)^2$, e^{3x}, 5^x, $\dfrac{2}{x^4}$, $4x^3$, au voisinage de $+\infty$

Exercice 2. ○○○ – *Manipulation de o*

Vrai/Faux :

a) $x = o(\sqrt{x})$ au voisinage de 0.

b) $3x^2 + 2x = O(x^2)$ au voisinage de $+\infty$.

c) $x^2 = o(x^3)$ au voisinage de $+\infty$.

d) $\dfrac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de 0.

e) $(x-1) = o\big((x-1)^2\big)$ au voisinage de 1.

f) $\sin x = x + o(x)$ au voisinage de 0.

g) $o(f) + o(f) = o(f)$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

h) $o(x) + o(x^2) = o(x)$ au voisinage de 0.

i) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$ au voisinage de 0.

j) $o(x) + o(x^2) = o(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3. ◐○○ – *Équivalents de suites*

Déterminer un équivalent et la limite des suites suivantes :

a) $s_n = \dfrac{5n^5 - 4n^4 + 3n^3}{2n^2 + 3n^5}$

b) $u_n = (n + 3\ln n)e^{-(n+1)}$

c) $v_n = \dfrac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$

d) $w_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$

e) $x_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$

f) $y_n = \dfrac{n^3 \ln(1+1/n)}{n^2\sqrt{1+3n}}$

g) $z_n = \dfrac{\sin(1/n)}{\exp(5/n)-1}$

Exercice 4. ●○○ – *Équivalents de fonctions*

Déterminer un équivalent des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \mapsto \dfrac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln(x)}$ en $+\infty$

b) $f_2 : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)-x}{x+\cos(x)}$ en $+\infty$

c) $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}}$ en $+\infty$

d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+2x^3}}$ en $+\infty$

e) $f_5 : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{1-\sqrt{1+2x^3}}$ en 0

f) $f_6 : x \mapsto \dfrac{\ln(x-2)}{e^x - e^3}$ en 3.

Exercice 5. ♣ – ●○○ – *Un équivalent*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels. On suppose que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

Déterminer la limite et un équivalent de (u_n).

2 Développements limités

Exercice 6. ●○○ – *Développement limité d'une fonction paire*

Soit f une fonction paire telle que $f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$ en 0.
A-t-on nécessairement $f(x) = 1 + x^2 + o(x^3)$ en 0 ?

Exercice 7. ♣ – ●◐○ – *Calcul pratique de développements limités*

Calculer les développements limités suivants :

a) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{1}{1-x} - e^x$

b) $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\sin(x)\cos(2x)$

c) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(x^3+1)\sqrt{1-x}$

d) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$

e) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln(1+x)^2$

f) $\mathrm{DL}_3(\pi/4)$ de $\sin(x)$

g) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

h) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln\big(1+\sin(x)\big)$

i) $\mathrm{DL}_3(1)$ de $\cos(\ln x)$

j) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(1+e^x)$

k) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(2+\sin x)$

l) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\exp(\sqrt{1+x})$

m) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln(1+\sqrt{1+x})$

n) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(3e^x + e^{-x})$

o) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $(1+x)^{1/x}$

p) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

q) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$

r) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\tan x}$

s) $\mathrm{DL}_2(1)$ de $\dfrac{x-1}{\ln x}$

t) $\mathrm{DL}_6(0)$ de $(\cos x)^{\sin x}$

u) $\mathrm{DL}_4(1)$ de $\dfrac{\ln x}{x^2}$

v) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$

w) $\mathrm{DL}_{100}(0)$ de $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$

x) $\mathrm{DL}_3(\pi/6)$ de $\exp(\sin x)$

y) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

z) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x}$

Exercice 8. ●◐○ – *Primitivation des développements limités*

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}\right)$. Calculer f' et en déduire le $\mathrm{DL}_4(0)$ de f.

Exercice 9. ♣ – ●◐○ – *Détermination d'équivalents*

Déterminer un équivalent des suites et fonctions suivantes :

a) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

b) $v_n = \sqrt{\ln(n^2+1)} - \sqrt{\ln(n^2+1/2)}$

c) $w_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - e$

d) $x_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}\right)$

e) $f_1 : x \mapsto \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$ en 0

f) $f_2 : x \mapsto (e+x)^e - e^{e+x}$ en 0

g) $f_3 : x \mapsto \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - 1$ en $+\infty$

h) $f_4 : x \mapsto \cos(\cos x) - \sin x$ en $\pi/2$

Exercice 10. ●◐○ – *Détermination de limites*

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \operatorname{ch} x - 2}{x^4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x^{1/x}}{(x-1)^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^{-x} \operatorname{ch}\sqrt{x^2+1}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2^-} \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-1}\right)^{x^2}$

i) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$

j) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$

k) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(n^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n}{n-1}}\right)$

l) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$

Exercice 11. ●◐○ – *Développements asymptotiques simples*

Donner un développement asymptotique à deux termes des suites suivantes : $(a, b, c \in \mathbb{R})$

a) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$

b) $v_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + (-1)^n}\right)$

c) $w_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$

d) $x_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

Exercice 12. ♣ – ●◐○ – *Équivalent d'une combinaison linéaire*

Peut-on trouver trois réels a, b et c tels que, en 0 :

$$\frac{1}{x} + \frac{a}{\ln(1+x)} + \frac{b}{e^x - 1} \sim cx\,?$$

Exercice 13. ♣ – ●●○ – *Développement asymptotique de* $\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

Déterminer un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$, à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3 Suites et fonctions implicites

Exercice 14. ♣ – ●◐○ – *Suite implicite, Acte I*

1. Montrer que, sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$, $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ a une unique solution, que l'on note x_n.
2. Donner un équivalent de x_n.
3. Montrer que $y_n = x_n - n\pi$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.
4. On pose $z_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ (qu'on déterminera) telle que $z_n \sim \frac{\alpha}{n}$.
5. En déduire un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 15. ●◐○ – *Suite implicite, Acte II*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + e^x = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite puis un équivalent de x_n.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 16. ●◐○ – *Suite implicite, Acte III*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^4 + x^3 = n$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.

2. Déterminer la limite de x_n.

3. Montrer que
$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{32n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

Exercice 17. ♣ – ●●○ – *Suite implicite, Acte IV*

Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite (croissante) des solutions positives de l'équation $(1+x)\sin x = 1$.

Exercice 18. ●○○ – *Développement limité de* tan, *en passant par* Arctan

Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan, en utilisant la relation $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$.

Exercice 19. ♣ – ●◐○ – *Développement limité d'une bijection réciproque*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 2x + \sin x$.

1. Montrer que f est bijective et que sa réciproque est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. Calculer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de f^{-1}.

Exercice 20. ●◐○ – *Développement asymptotique d'une fonction implicite*

Pour tout $t \geq 0$, on définit la fonction $g_t : x \mapsto x^3 + tx - 1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, l'équation $g_t(x) = 0$ a une unique solution notée $u(t)$.

2. Montrer que u est strictement décroissante. En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$.

3. Donner un développement asymptotique à deux termes de $u(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 21. ●◐○ – *Développement limité d'une fonction implicite*

Montrer que l'équation $x + x^4 = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution lorsque $y \in \mathbb{R}$ est suffisamment proche de 0. On la note $f(y)$. Déterminer le $\mathrm{DL}_{12}(0)$ de f.

4 Autres applications

Exercice 22. ●◐○ – *Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$*

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ sur $]0, \pi/2]$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

2. Montrer que le prolongement de f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 23. ♣ – ●●◐ – *Prolongement $\mathscr{C}^\infty$ du taux d'accroissement*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. On définit g par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$. On souhaite montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1. Montrer que g admet un développement limité à tout ordre en 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, établir une relation simple entre $f^{(n)}(x)$, $g^{(n-1)}(x)$ et $g^{(n)}(x)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}$ admet un prolongement par continuité en 0 défini par $g^{(n)}(0) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ et que $g^{(n)}$ admet un développement limité à tout ordre en 0.
4. Conclure.

Exercice 24. ●◐○ – *Calcul de dérivées supérieures*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x^2)^{-1/2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer les 5 premières dérivées en 0 de la fonction $\dfrac{\ln(\cos x)}{1+x}$.

Exercice 25. ♣ – ●◐○ – *Étude de tangentes*

Faire l'étude de la tangente au point d'abscisse 0, aux courbes d'équation :

a) $y = \dfrac{e^{1+\sin(x)} - e}{\tan(x)}$

b) $y = \big(\mathrm{ch}(x)\big)^{1/x}$

Exercice 26. ♣ – ●◐○ – *Étude d'asymptotes*

Étudier l'asymptote en $+\infty$ des courbes d'équation :

a) $y = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$

b) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)(x+2)}$

Indications

Exercice 5. Encadrer la suite (u_n) en utilisant sa décroissance.

Exercice 11. Pour les suites dépendant de constantes a, b, c, attention aux cas particuliers !

Exercice 13. On ne peut pas sommer un nombre infini de o ; revenir à la définition.

Exercice 14. Pour 2., encadrer simplement x_n ; pour 3. et 4., obtenir une équation sur y_n, puis z_n.

Exercice 22. Écrire un DL à l'ordre 1 de f ne suffit pas ; il est plus pertinent d'écrire un DL à l'ordre 0 de f et de f'.

Exercice 24. My Taylor is rich.