Séries numériques

1 Détermination de la nature d'une série

Exercice 1.♣ – ◐○○ – *Séries à termes positifs*

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

b) $\sum e^{-\sqrt{n}}$

c) $\sum \frac{n}{2^n+n}$

d) $\sum \frac{1}{(n^2+1)\sin(1/\sqrt{n})}$

e) $\sum \frac{n^3\ln(2n)}{3^n}$

f) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

g) $\sum \frac{n!^2}{(2n)!}$

h) $\sum \frac{1}{\ln(n)^n}$

i) $\sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$

j) $\sum e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

k) $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x}dx$

l) $\sum \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha>0)$

m) $\sum \cos^n\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha>0)$

n) $\sum \sqrt{\tan\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}$

o) $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^n}$

Exercice 2. ◐○○ – *Entre* $\sum \frac{1}{n}$ *et* $\sum \frac{1}{n^2}$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré parfait, $u_n = \frac{1}{n^2}$ sinon.

Exercice 3.♣ – ●○○ – *Séries à termes de signe variable*

Déterminer la nature des séries suivantes : $(\alpha,\beta>0)$

a) $\sum \frac{(-1)^n\ln(n)}{n^2}$

b) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+\sin(n^2)}$

c) $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$

d) $\sum \frac{\sin(n^\alpha)}{n^2}$

e) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha\ln(n)^\beta}$

f) $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

g) $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$

h) $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

i) $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}dx$

Exercice 4. ●○○ – *Avec écriture décimale*

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{1}{nc(n)^\alpha}$, où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n en base 10 et $\alpha>0$.
2. $\sum \frac{1}{k_n}$, où k_n est le n-ème entier dont l'écriture en base 10 est sans le chiffre 9.

Exercice 5. ●○○ – *Une série dont le terme général est défini par récurrence*

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{\cos u_n}{n+1}.$$

Exercice 6. ●◐○ – $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$.

Exercice 7. ●◐○ – $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{x_n}$?
2. Trouver une relation entre x_{n+1}^2 et $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2}$.
3. Déterminer un équivalent de x_n.

Exercice 8. ♣ – ●●○ – *Une série avec des restes*

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Exercice 9. ●●○ – $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$

Après avoir justifié son existence, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k\geq n} \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^k\right)$.

Exercice 10. ●●○ – *Étude fine de convergence*

Déterminer la nature des séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ et $\sum \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$, où $\alpha > 0$.

Exercice 11. ♣ – ●●◐ – $\sum \frac{|\sin n|}{n}$

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{|\sin n|}{n}$.

2 Calculs de sommes

Exercice 12. ●◐○ – *Calculs divers de sommes*

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

a) $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

c) $\sum_{n\geq 1} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$

d) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

e) $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos n}{2^n}$

f) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n!}$

g) $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

h) $\sum_{n\geq 2} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$

i) $\sum_{n\geq 0} \left(3+(-1)^n\right)^{-n}$

Exercice 13. ●◐○ – *Somme d'une série de restes*

1. Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, par $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

2. Montrer la convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 14. ♣ – ●●○ – *Regroupement de termes*

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Exercice 15. ♣ – ●●◐ – $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

1. Pour tout $n\geq 1$, on pose $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$. Montrer que la suite (c_n) converge.

2. Trouver des réels r, s, t tels que pour tout $n\geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = r\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + s\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} + t\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.$$

3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

3 Comparaisons série-intégrale

Exercice 16. ●○○ – *Avec des séries de Riemann*

On ne suppose pas connus les équivalents des sommes partielles ou restes des séries de Riemann.

1. Déterminer la nature de $\sum u_n$, où $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

2. Déterminer la nature de $\sum u_n$, où $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^\alpha}$, où $\alpha > 0$.

3. Déterminer la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $S_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 17. ♣ – ●○○ – $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$

Déterminer un équivalent, quand $n \to +\infty$, de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$.

Exercice 18. ♣ – ●◐○ – $\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$

Déterminer un équivalent, quand $n \to +\infty$, de $\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$.

Exercice 19. ●◐○ – $\sum n^{1/n}$

1. Déterminer la nature de la série $\sum n^{1/n}$.
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{1/k}$. Montrer que $S_n \sim n$, puis que $S_n - n \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 20. ●●○ – *Une comparaison série-intégrale non monotone*

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(\ln t)}{t} dt$ diverge en $+\infty$.
2. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que
$$\left| \frac{\sin(\ln k)}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\sin(\ln t)}{t} dt \right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.

Exercice 21. ♣ – ●●◐ – *Séries de Hardy*

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1([1, +\infty[)$ telle que $x \mapsto \int_1^x |f'(t)|\, dt$ converge en $+\infty$.

   Montrer que $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge ssi la fonction $x \mapsto \int_1^x f(t)\, dt$ converge en $+\infty$.
2. Soit $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_n \frac{\sin \sqrt{n}}{n^\alpha}$ converge-t-elle ?

4 Exercices plus théoriques

Exercice 22. ◐○○ – $\sum u_n$ *et* $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ ont la même nature.
2. Qu'en est-il si on ne suppose plus les u_n positifs ?

Exercice 23. ●○○ – *Théorème de point fixe*

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, soit f une application contractante de I dans I. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 24. ♣ – ●◐○ – *Suite décroissante telle que* $\sum u_n$ *converge*

Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge.
Étudier la série de terme général $n(u_{n-1} - u_n)$ et en déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 25. ●◐○ – *Règle de Raabe-Duhamel*

Soit (u_n) une suite de réels positifs et $\alpha > 0$ tels que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1. On pose $v_n = n^\alpha u_n$ et $w_n = \ln v_{n+1} - \ln v_n$.
   Montrer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
2. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$. Conclure quant à la nature de $\sum u_n$.
3. Application : soient $0 < a < b$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.
   Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 26. ●◐○ – *Un produit infini*

Étudier la convergence de $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 27. ♣ – ●●○ – *Développement asymptotique de la série harmonique*

1. Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ tend vers une constante, qu'on notera γ.
2. À l'aide de la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ et d'une comparaison série-intégrale, montrer que $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$.
3. Montrer enfin que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 28. ♣ – ●●○ – *Avec des permutations*

1. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.
2. Existe-t-il $\alpha > 2$ tel que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha}$ converge ?

Exercice 29. ●●○ – *Série des inverses des ppcm*

Soit (u_n) une suite strictement croissante d'entiers dans $\mathbb{N}^*$.
Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{\alpha_n}$, où $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \text{ppcm}(u_0, \ldots, u_n)$.

Exercice 30. ●●○ – *Un raffinement de l'équivalent de Stirling*

1. Donner un équivalent de l'aire u_n comprise entre le graphe de ln sur $[n, n+1]$ et la corde correspondante.

2. En déduire un développement asymptotique 5 termes de $\ln n!$ puis un développement asymptotique à deux termes de $n!$.

Exercice 31. ♣ – ●●○ – *Transformation d'Abel*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} V_k(u_{k+1} - u_k)$.

2. En déduire le *critère d'Abel* :

   Si (u_n) est une suite de réels positifs, décroissante et de limite nulle ; et si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

3. **Une application :** soient $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Discuter de la nature de la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Exercice 32. ●●○ – *Critère de condensation de Cauchy*

1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissant vers 0.
   Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum 2^n a_{2^n}$ ont même nature.

2. En déduire la nature des séries $\sum \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ et $\sum \frac{1}{n \ln n \ln^\alpha(\ln n)}$, où $\alpha > 0$.

Exercice 33. ♣ – ●●● – *Fonctions préservant la convergence*

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ préserve la convergence si pour toute série $\sum_n a_n$ convergente, la série $\sum_n f(a_n)$ converge également. Montrer que les fonctions préservant la convergence sont les fonctions linéaires sur un voisinage de 0.

Indications

Exercice 2. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$ où $v_n = 0$ si n est un carré parfait ; $\frac{1}{n}$ sinon ?

Exercice 10. Faire un développement asymptotique du terme général, jusqu'à obtenir le terme général d'une série absolument convergente.

Exercice 11. Il s'agit de dire proprement que $\sin(n)$ est très souvent éloigné de 0.

Exercice 23. Pour l'existence, on pourra considérer une série de terme général $f^{n+1}(x_0) - f^n(x_0)$, où x_0 est un point arbitraire de I.