DM 19 - Suite récurrente et séries

1 Exercice

1. Étudier la convergence d'une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

2. Déterminer, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha}$.

2 Problème – Un résultat sur les séries numériques

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. L'objectif du problème est de montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

i) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum a_n u_n$ converge.

ii) La série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

Les sections 1.1 et 1.2 présentent des outils classiques sur les séries numériques ; certains des résultats qui y sont démontrés pourront être utilisés dans la section 1.3.

2.1 Transformation d'Abel

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} V_k (u_{k+1} - u_k).$$

2. En déduire le *critère d'Abel* :

   Si (u_n) est une suite de réels positifs, décroissante et de limite nulle ; et si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

3. **Une application :** soient $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Discuter de la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

2.2 Séries $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose $\sum u_n$ divergente. On souhaite montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

4. Soit $\alpha > 1$.

   a) Montrer que $\forall n \geq 1, \dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$.

   b) En déduire que $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

5. Soit $\alpha \in [0,1[$. Montrer que $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

6. On considère le cas limite $\alpha = 1$.

   a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de nombres. Montrer que[1], si $\sum a_n$ est convergente, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, q > p \geq N \implies \left| \sum_{n=p}^{q} a_n \right| \leq \varepsilon.$$

   b) Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que si p est assez grand, alors $\displaystyle\sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_n} \geq \frac{1}{2}$.

   c) En déduire la divergence de $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$.

7. **Une application :** soit $\beta > 0$. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n \ln^\beta n}$, selon la valeur de β.

2.3 Démonstration de l'équivalence

Soit (a_n) une suite à valeurs réelles.

8. Montrer l'implication $ii) \implies i)$.

On suppose désormais que (a_n) vérifie (i) :

Pour toute suite (u_n) à valeurs réelles telle que $\sum u_n$ est convergente, $\sum a_n u_n$ est convergente.

9. Montrer que la suite (a_n) est bornée.

10. Soit (ε_n) une suite à valeurs réelles de limite nulle.

    a) Montrer que la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ converge.

    b) Montrer que la série $\sum \varepsilon_n |a_{n+1} - a_n|$ converge.

11. En déduire que (a_n) vérifie $ii)$.

[1] C'est le *critère de Cauchy* ; il s'agit en fait d'une équivalence.