DM 19 - Suite récurrente et séries

1 Exercice

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$. Pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 1$. De plus, si $x > 1$, on a $f(x) < 1 + \dfrac{2}{1} = 3$. On en déduit que, quel que soit $u_0 > 0$, $u_2 \in]1,3[$.

   La fonction f est décroissante sur $[1,3]$, avec $f(1) = 3$ et $f(3) = 1 + \dfrac{2}{3} \in [1,3]$. On en déduit que l'intervalle $[1,3]$ est stable par f.

   On résout :

   $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x = 1 + \frac{2}{x} \\ &\iff x^2 - x - 2 = 0 \\ &\iff x = -1 \text{ ou } x = 2 \end{aligned}$$

   L'unique point fixe de f sur $[1,3]$ est donc 2.
   On peut calculer $f'(2) = -1/2$, pour conjecturer que 2 est un point fixe attractif.

   On calcule
   $$f \circ f(x) = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = 1 + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x+2}{x+2}.$$

   Donc $f \circ f(x) - x = \dfrac{-x^2 + x + 2}{x+2}$. On en déduit que $f \circ f(x) > x$ pour $x < 2$ et $f \circ f(x) < x$ pour $x > 2$.

   Ainsi, les intervalles $[1,2]$ et $[2,3]$ sont stables par $f \circ f$. Une suite récurrente de type $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ est croissante dans l'intervalle $[1,2]$ et décroissante dans l'intervalle $[2,3]$.

   Bilan : si $u_0 \in [1,2]$, $u_1 \in [2,3]$. La suite (u_{2n}) est à valeurs dans $[1,2]$ et est croissante ; la suite (u_{2n+1}) est à valeurs dans $[2,3]$ et est décroissante. Par théorème de la limite monotone, ces deux suites convergent ; nécessairement vers le point fixe 2 (seul point fixe de $f \circ f$ sur $[1,3]$). Et inversement si $u_0 \in [2,3]$.

   On en déduit que (u_n) converge toujours vers 2.

2. On a

   $$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \\ &= \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - (1 - \frac{1}{2n}) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} + O(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

En notant $u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha}$, on a donc

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+3/2}}\right).$$

En particulier, $u_n \sim (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$.

- Si $\alpha \leq -1/2$, u_n ne tend donc pas vers 0. Et donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha > -1/2$, alors $\frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$ tend vers 0 en décroissant. Par le critère des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$ converge. De plus, on a dans ce cas, $\alpha + 3/2 > 1$, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+3/2}}$ est convergente. Donc, par comparaison, toute série du type $\sum_{n\geq 1} O\left(\frac{1}{n^{\alpha+3/2}}\right)$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi, par somme de séries convergentes, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente dans ce cas.

2 Problème – Un résultat sur les séries numériques

2.1 Transformation d'Abel

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $v_k = V_k - V_{k-1}$ (avec $V_{-1} = 0$). Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k v_k &= \sum_{k=0}^{n} u_k (V_k - V_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k V_k - \sum_{\ell=0}^{n-1} u_{\ell+1} V_\ell \\ &= u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k.\end{aligned}$$

2. On suppose que (u_n) et (v_n) vérifient ces conditions. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} V_k (u_k - u_{k+1}).$$

Comme (u_n) tend vers 0 et que V_n est bornée, $(u_n V_n)$ tend vers 0. De plus, comme (u_n) est décroissante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |V_k(u_k - u_{k+1})| = \sum_{k=0}^{n-1} |V_k|(u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} M(u_k - u_{k+1}) = M(u_0 - u_n) \leq M u_0,$$

où on a noté M un majorant de $(|V_k|)$. Ceci montre que la série $\sum V_k(u_k - u_{k+1})$ est absolument convergente, donc convergente.

Ainsi, quand $n \to +\infty$, $u_n V_n$ et $\sum_{k=0}^{n-1} V_k(u_k - u_{k+1})$ tendent vers une limite finie. Donc la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

3. **Une application :** Comme $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}$, on sait déjà que la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente ssi $\alpha > 1$. Notons $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $v_n = e^{in\theta}$. Alors (u_n) est une suite décroissante de réels, tendant vers 0. De plus,

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \text{ si } \theta \not\equiv 0\,[2\pi].$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (si $\theta \not\equiv 0\,[2\pi]$) : $|V_n| \leq \dfrac{2}{|1-e^{i\theta}|}$ et donc $\big(|V_n|\big)$ est majorée.

Par le critère d'Abel, on en déduit que la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 0$, et pour tout $\theta \not\equiv 0\,[2\pi]$.

Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, on a $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^\alpha}$, de sorte que cette série converge ssi $\alpha > 1$.

2.2 Séries $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$

4. Soit $\alpha > 1$.

   a) Commes les u_n sont positifs, (S_n) est croissante. Par décroissance de $x \mapsto x^\alpha$, on a $\dfrac{1}{t^\alpha} \leq \dfrac{1}{S_n^\alpha}$, pour tout $t \in [S_{n-1}, S_n]$. Donc,

   $$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{1}{S_n^\alpha}\int_{S_{n-1}}^{S_n} dt = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \frac{u_n}{S_n^\alpha}.$$

   b) Au vu de la majoration précédente, et comme les séries considérées sont à termes positifs, il suffit de montrer que la série $\sum \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente. Or, si $n \in \mathbb{N}$,

   $$\sum_{k=1}^{n} \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} = [\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}]_{S_0}^{S_n} = \frac{1}{\alpha-1}(S_0^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}) \leq \frac{S_0^{1-\alpha}}{\alpha-1} \text{ car } \alpha > 1.$$

   Ceci montre que la série $\sum \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$ est une série majorée de réels positifs. Donc, elle converge ; donc la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ aussi.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{S_n^\alpha} = S_n^{1-\alpha}.$$

   La première inégalité vient de la croissance de (S_n^α). Or $1-\alpha > 0$ et $S_n \to +\infty$. On en déduit que $S_n^{1-\alpha} \to +\infty$. Donc, par comparaison, $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ est une série divergente.

6. On considère le cas limite $\alpha = 1$.

a) On suppose que $\sum a_n$ est convergente. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $S_p = \sum_{n=0}^{p} a_n$. On note aussi $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N+1, |S_p - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Soient $p, q \geq N$, avec $q > p$. On a

$$\Big|\sum_{n=p}^{q} a_n\Big| = |S_q - S_{p-1}| \leq |S_q - \ell| + |S_{p-1} - \ell| \leq 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La condition est bien vérifiée.

b) Pour tout $n \in [\![N, N+p]\!]$, on a $S_n \leq S_{N+p}$. Donc,

$$\sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_n} \geq \sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_{N+p}} = \frac{S_{N+p} - S_{N-1}}{S_{N+p}} = 1 - \frac{S_{N-1}}{S_{N+p}}.$$

Or, quand $p \to +\infty$, $\frac{S_{N-1}}{S_{N+p}} \to 0$. Donc, par localisation asymptotique, quand p est assez grand, $\sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_n}$ est plus grand que toute constante strictement inférieure à 1, par exemple 1/2.

c) Ceci montre que la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ ne vérifie par le critère de Cauchy : pour $\varepsilon = 1/4$ par exemple, si $N \in \mathbb{N}$, en considérant un p comme dans la question précédente, on a $\sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_n} > \frac{1}{4}$, ce qui nie le critère de Cauchy (*N joue le rôle de p et $N+p$ de q dans la définition de ce critère*).
Donc, la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

7. **Une application :** Notons $u_n = \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$. On sait que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est équivalente à $\ln n$. Donc, pour tout $\beta > 0$, $\frac{u_n}{S_n^\beta} \sim \frac{1}{n \ln^\beta n}$. Comme les séries sont à termes positifs, on en déduit que la nature de $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ est la même que celle de $\sum \frac{u_n}{S_n^\beta}$.

   D'après ce qui précède, la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ converge ssi $\beta > 1$.

2.3 Démonstration de l'équivalence

8. On suppose que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Soit $n \in \mathbb{N}$, par transformation d'Abel :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = a_n U_n - \sum_{k=0}^{n-1} U_k (a_{k+1} - a_k),$$

   où $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Comme la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente par hypothèse, elle est aussi convergente. Donc la suite (a_n) converge. Or (U_n) converge aussi par hypothèse. Donc $(a_n U_n)$ converge.

De plus, si M est un majorant de $\big(|U_k|\big)$ (bien définie puisque (U_n) converge), on a :

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} U_k(a_{k+1}-a_k)\Big| \leq M\sum_{k=0}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|.$$

Donc, la série $\sum U_n(a_{n+1}-a_n)$ est absolument convergente, donc convergente.

Finalement, $\sum a_n u_n$ est convergente.

9. On suppose par l'absurde que (a_n) n'est pas bornée. Alors (a_n) n'est pas majorée ou pas minorée. Par symétrie, on suppose qu'elle n'est pas majorée. On peut alors trouver une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{\phi(n)} \geq 2^n$.

   On définit une suite u par

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{\phi(n)} = \frac{1}{2^n} \text{ et } \forall k \notin \phi(\mathbb{N}), u_k = 0.$$

   La série $\sum u_n$ est convergente (de limite 1) : en effet, si $N \in \mathbb{N}$, on considère le plus grand n tel que $N \geq \phi(n)$. Alors, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{\phi(n)} u_k \leq \sum_{j=0}^{n} u_{\phi(j)} = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^j} = 1$. Le changement de variable est possible car les u_k sont nuls si k n'est pas dans l'image de ϕ.

   Un calcul analogue montre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k u_k = n$, si n est le plus grand entier tel que $N \geq \phi(n)$.

   En particulier, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\phi(n)} a_k u_k = n \to +\infty$; donc la série $\sum a_n u_n$ est divergente.

   Ceci contredit la propriété $i)$ et conclut la preuve par l'absurde.

10. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

   $$\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k(a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon_{k-1}a_k - \sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k a_k = \varepsilon_n a_{n+1} - \varepsilon_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n}(\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k)a_k.$$

   La suite $(\varepsilon_n a_{n+1})$ tend vers 0 car (a_n) est bornée. Le terme $\varepsilon_0 a_0$ est une constante. Enfin, la série $\sum(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)$ converge (vers ε_0 par téléscopage et le fait que $\varepsilon_n \to 0$), donc par propriété $i)$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k)a_k$ converge, quand $n \to +\infty$.

   Finalement, la série $\sum \varepsilon_n(a_{n+1}-a_n)$ est convergente.

   b) On note $\widetilde{\varepsilon_n} = \operatorname{sgn}(a_{n+1}-a_n)\varepsilon_n$, où $\operatorname{sgn}(x)$ vaut 1 si $x \geq 0$ et -1 sinon. La suite $(\widetilde{\varepsilon_n})$ tend aussi vers 0. Donc, la série $\sum \widetilde{\varepsilon_n}(a_{n+1}-a_n)$ converge. Comme $\widetilde{\varepsilon_n}(a_{n+1}-a_n) = \varepsilon_n|a_{n+1}-a_n|$, ceci conclut.

11. On a montré que si (a_n) vérifiait $i)$, alors la série $\sum \varepsilon_n|a_{n+1}-a_n|$ converge, pour toute suite ε_n tendant vers 0. Supposons par l'absurde que $\sum|a_{n+1}-a_n|$ diverge. Alors, en notant S_n sa somme partielle d'ordre n, on a $\varepsilon_n = \dfrac{1}{S_n} \to 0$. Pourtant, d'après la question 6, on devrait avoir $\sum \dfrac{|a_{n+1}-a_n|}{S_n}$ divergente, c'est absurde.

    Donc, $\sum|a_{n+1}-a_n|$ est convergente : (a_n) vérifie la propriété $ii)$.

Remarque : on a donc utilisé le résultat suivant, issu de la partie 1.2. Si $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs, on peut trouver une suite (ε_n) (à termes positifs) tendant vers 0 telle que $\sum \varepsilon_n u_n$ est encore divergente.