DM 20 - Series mirabili – Théories de l'intégration

1 La *series mirabili* de Johann Bernoulli

Le but de l'exercice est de démontrer l'admirable identité suivante :

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

1. On justifie d'abord que les deux membres de l'égalité sont bien définis.

   a) Rappeler la définition de $f : x \mapsto x^x$ sur $]0,1]$ et montrer que f se prolonge par continuité en 0. *Par abus de notation, on note* $\int_0^1 x^x\,dx$ *l'intégrale de ce prolongement sur* $[0,1]$.

   b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ est absolument convergente.

2. **Un calcul d'intégrales.** Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^n \ln^p x$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ et on note $I_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln^p x\,dx$ son intégrale.

   a) Établir *soigneusement*[1] une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n,p-1}$.

   b) En déduire que $I_{n,n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit f_N sur $\mathbb{R}$ par $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$.

   On fixe un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer[2] que la suite de fonctions $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers exp sur $[a,b]$.

4. En déduire que $\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n \ln^n x}{n!}\,dx$ et conclure.

2 Des théories de l'intégration

On présente différentes méthodes, de plus en plus générales, pour définir l'intégrale d'une fonction.

2.1 Fonctions réglées

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée si elle est limite uniforme de fonctions en escalier sur $[a,b]$[3].
On cherche à montrer l'équivalence suivante :

[1] On sera attentif au comportement en 0.

[2] On utilisera la formule de Taylor avec reste intégral ; cf. cours en ligne.

[3] L'intégrale sur $[a,b]$ d'une telle fonction peut être définie par approximation, comme on a fait dans le cours pour les fonctions continues par morceaux.

i) f est réglée ;

ii) f a une limite à gauche et à droite en tout point $x \in [a,b]$[4].

1. **Démonstration de i) $\implies$ ii).** On note $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant vers f en norme infinie. Soit $x \in [a,b[$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

   $$\forall y, z \in]x, x+\delta] \cap [a,b], |f_n(y) - f_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

   (b) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que

   $$\forall y, z \in]x, x+\delta] \cap [a,b], |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

   (c) En déduire[5] l'existence de $\lim\limits_{x^+} f$.
   On montrerait de même l'existence de $\lim\limits_{x-} f$, pour tout $x \in]a,b]$.

Si $x \in [a,b]$ et $r > 0$, on note $B(x,r) = \Big\{y \in [a,b] \mid |y-x| < r\Big\}$.

2. Pour tout $x \in [a,b]$, on se donne $\delta_x > 0$. Montrer le lemme de Lebesgue :

   $$\exists r > 0, \forall y \in [a,b], \exists x \in [a,b] : B(y,r) \subset B(x,\delta_x).$$

3. **Démonstration de ii) $\implies$ i).** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant ii), soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\delta_x > 0$ tel que

   $$\forall y, z \in B(x,\delta_x), \big((y,z < x) \text{ ou } (y,z > x)\big) \implies |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

   (b) En déduire qu'il existe une subdivision $\sigma = (u_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ de $[a,b]$ telle que

   $$\forall k \in [\![0, N-1]\!], \forall y, z \in]u_k, u_{k+1}[, |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

   (c) En déduire qu'il existe $h \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ telle que $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$. Conclure.

4. **Exemples.**

   (a) Montrer que les fonctions continues par morceaux sont réglées.

   (b) Montrer que les fonctions monotones sont réglées.

   (c) Donner un exemple de fonction réglée f sur $[0,1]$ telle qu'il existe une suite décroissante $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$ de limite nulle vérifiant :

      i) $\{r_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des points de discontinuité de f.

      ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]r_{2n+1}, r_{2n}[, f(x) > 0$ et $\forall x \in]r_{2n}, r_{2n-1}[, f(x) < 0$.

[4] Seulement à droite en a et à gauche en b.

[5] On utilisera la caractérisation séquentielle de la limite et le critère de Cauchy.

2.2 Fonctions Riemann-intégrables

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On note $\mathscr{E}^-(f) = \Big\{h \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big) \mid h \leq f\Big\}$ et $\mathscr{E}^+(f) = \Big\{h \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big) \mid h \geq f\Big\}$.
On définit[6]

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b h \mid h \in \mathscr{E}^-(f)\right\} \text{ et } I^+(f) = \inf\left\{\int_a^b h \mid h \in \mathscr{E}^+(f)\right\}.$$

On dit que f est Riemann-intégrable si $I^-(f) = I^+(f)$. Dans ce cas, cette valeur commune est l'intégrale de f sur $[a,b]$ et est notée $\displaystyle\int_a^b f$.

5. Montrer qu'une fonction Riemann-intégrable est bornée.

6. Montrer qu'une fonction réglée est Riemann-intégrable et que, pour une telle fonction, les deux notions d'intégrale coïncident.

7. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est Riemann-intégrable, mais qu'elle n'est pas réglée.

8. Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemann-intégrable.

On appelle subdivision pointée de $[a,b]$ la donnée $(\sigma, \underline{t})$ d'une subdivision $\sigma = (u_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ de $[a,b]$ et de $\underline{t} = (t_0,\dots,t_{N-1})$ tels que pour tout $k \in [\![0,N-1]\!]$, $t_k \in [u_k, u_{k+1}]$. La somme de Riemann de f associée à la subdivision pointée $(\sigma,\underline{t})$ est

$$S(f,\sigma,\underline{t}) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)(u_{k+1} - u_k).$$

On rappelle que le pas de la subdivision σ est $\delta(\sigma) = \displaystyle\sup_{k\in[\![0,N-1]\!]} \big\{u_{k+1} - u_k\big\}$.

9. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

   i) f est Riemann-intégrable ;

   ii) Il existe $I \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée $(\sigma,\underline{t})$ de pas $\delta(\sigma) \leq \delta$, $|S(f,\sigma,\underline{t}) - I| \leq \varepsilon$.

Dans ce cas, la valeur de I est $\displaystyle\int_a^b f$. De façon plus concise : $\displaystyle\lim_{\delta(\sigma)\to 0} S(f,\sigma,\underline{t}) = \int_a^b f$.

2.3 Fonctions KH-intégrables

On appelle jauge sur $[a,b]$ une fonction δ sur $[a,b]$ strictement positive. Une subdivision pointée $(\sigma,\underline{t})$ sur $[a,b]$ est δ-fine si $\forall k \in [\![0,N-1]\!], u_{k+1} - u_k \leq \delta(t_k)$.
Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite KH-intégrable[7] s'il existe $I \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ sur $[a,b]$ tel que si $(\sigma,\underline{t})$ est une subdivision pointée δ-fine, alors $|S(f,\sigma,\underline{t}) - I| \leq \varepsilon$.
Dans ce cas, I est l'intégrale de f et est notée $\displaystyle\int_a^b f$.

[6] Conventionnellement, $\inf\varnothing = +\infty$ et $\sup\varnothing = -\infty$.
[7] D'après Ralph Henstock (1923-2007) et Jaroslav Kurweil (1926-2022).

10. Montrer qu'une fonction Riemann-intégrable est KH-intégrable et que, pour une telle fonction, les notions d'intégrale coïncident.

11. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est KH-intégrable, mais qu'elle n'est pas Riemann-intégrable. Déterminer son intégrale.

12. Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est KH-intégrable et déterminer son intégrale.

13. **Théorème fondamental de l'analyse.**

    (a) Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$.
    Montrer que f' est KH-intégrable sur $[a,b]$ et que $\displaystyle\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

    (b) Montrer qu'en général f' n'est pas Riemann-intégrable.