Probabilités sur un univers fini – A

1 Questions théoriques

Exercice 1. ◐○○ – *Construction d'une mesure de probabilité*

Dans l'univers $\Omega = [\![1, n]\!]$, montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité P sur Ω telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la probabilité de l'évènement $[\![1, k]\!]$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 2. ♣ – ●○○ – *Couplage de lois de Bernoulli*

Soient $p, q \in [0, 1]$. Déterminer toutes les lois conjointes possibles pour deux variables aléatoires X et Y telles que $X \sim \mathscr{B}(p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(q)$.

Exercice 3. ♣ – ●◐○ – *Variables symétriques*

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que X et $-X$ aient la même loi. Montrer qu'il existe un espace probabilisé fini (Ω', P') et deux variables aléatoires indépendantes $Y : \Omega' \to \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon : \Omega' \to \{\pm 1\}$ telles que X et εY aient la même loi.
Peut-on en général faire en sorte que $\Omega = \Omega'$?

2 Formule de Bayes

Exercice 4. ◐○○ – *Bayes est malade*

Un individu est testé positif à une maladie touchant une personne sur 1000. La probabilité d'une erreur du test (faux positif ou faux négatif) est de 1%. Quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

Exercice 5. ◐○○ – *Bayes travaille à l'usine*

Dans une usine, trois machines A, B et C produisent le même type de pièces. La machine A produit 50% du total, la machine B 30% et la machine C 20%. 3% des pièces produites par A sont défectueuses. Ce pourcentage est de 4% pour la B et de 5% pour la C.
On prend une pièce au hasard et elle est défectueuse. Quelle est la probabilité que cette pièce ait été produite par la machine A ?

Exercice 6. ♣ – ●○○ – *Bayes joue aux dés*

On dispose de N dés à 6 faces dont T sont truqués. Pour ces dés truqués, la probabilité d'obtenir un 6 est égale à $1/2$. On choisit un dé au hasard parmi les N et on le lance n fois. On obtient n fois le résultat 6.
Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

Exercice 7. ♣ – ●○○ – *Bayes siège au parlement*

L'Assemblée nationale est constituée d'une proportion p de députés conservateurs, qui ne changent jamais d'avis, et d'une proportion $1-p$ de députés progressistes qui changent d'avis au hasard, avec probabilité r, entre deux votes successifs. Au cours d'une séance, un certain député a voté deux fois de suite de la même façon.

1. Quelle est la probabilité que ce député soit conservateur ?
2. Quelle est la probabilité qu'il vote de la même façon la prochaine fois ?

3 Formule de transfert

Exercice 8. ○○○ – *Espérance de* $\dfrac{1}{X}$

On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par les probabilités suivantes : $P(X=2)=P(X=3)=1/4$ et $P(X=4)=1/2$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 9. ●○○ – *Avec une loi binomiale*

Soit X une variable de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer $E(2^X)$ et $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 10. ♣ – ●◐○ – *Avec deux variables aléatoires*

1. Soient X et Y indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$. Calculer $E\big(|X-Y|\big)$.
2. Même question si X et Y suivent la loi $\mathscr{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$.

4 Calculs divers

Exercice 11. ♣ – ○○○ – *Le paradoxe du chevalier de Méré*

Qu'est-ce qui est le plus probable ?

- Obtenir un 6 en lançant 4 fois un dé ;
- Obtenir un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice 12. ◐○○ – *Une formule pour l'espérance*

Soit $n \geq 1$, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1,n\rrbracket$. Montrer que $E(X)=\sum_{k=0}^{n-1} P(X>k)$.

Exercice 13. ♣ – ●◐○ – *Deux lois binomiales*

On lance n fois une pièce, puis on la lance à nouveau n fois.

1. Quelle est la probabilité p_n d'avoir obtenu le même nombre de Pile ?
2. Déterminer un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14. ●◐○ – *Mode d'une loi binomiale*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
Quelle est la valeur de X la plus probable ?

Exercice 15. ●◐○ – *Min et max de deux uniformes*

On lance deux dés classiques équilibrés et on note Y et Z respectivement la plus petite et la plus grande valeur obtenue. Déterminer la loi de conjointe de Y et Z, les lois de Y et Z et les lois conditionnelles de Z sachant Y.

Exercice 16. ●◐○ – *Dé à* 4 *faces*

On lance un dé à 4 faces, n fois de suite. On note p_n la probabilité que les 4 chiffres apparaissent au moins une fois lors des n lancers.

1. Calculer p_n, pour $n \leq 5$.
2. Montrer que $p_n = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{4}{k} \frac{k^n}{4^n}$.
3. Déterminer la limite de p_n.

Exercice 17. ♣ – ●◐○ – *Méthode des moindres carrés*

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, avec X de variance strictement positive. Déterminer la droite d'approximation linéaire de Y en fonction de X, i.e. trouver deux réels a et b minimisant la quantité $E\left((Y-(aX+b))^2\right)$.

5 Problèmes d'urnes

Exercice 18. ♣ – ●○○ – *Parité du nombre de tirages d'une boule*

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ; on tire successivement n boules avec remise. Calculer la probabilité p_n de tirer la boule 1 un nombre impair de fois. Limite de p_n ?

Exercice 19. ●◐○ – *Urne de Polya*

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. À chaque fois qu'on tire une boule, on remet dans l'urne la boule tirée, ainsi qu'un boule de même couleur. Quelle est la loi du nombre de boules blanches au n-ème tirage ?

Exercice 20. ♣ – ●●○ – *Urne de Polya - une variante*

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire une boule, on note sa couleur et on remet la boule accompagnée de d boules de sa couleur. On réitère l'expérience n fois. Quelle est la probabilité que la boule obtenue au n-ième tirage soit blanche ?

Exercice 21. ●◐○ – *Urne d'Ehrenfest*

On considère deux urnes A et B contenant en tout b boules, où $b \geq 2$. On tire de façon équiprobable une boule et on la change d'urne. On renouvelle l'expérience. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A après n étapes et $Y_n = X_{n+1} - X_n$.

1. Déterminer $E(Y_n)$ en fonction de $E(X_n)$.
2. En déduire $E(X_n)$ et sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 22. ♣ – ●●◐ – *Loi du nombre de tirages*

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue des tirages successifs jusqu'à avoir tiré k boules blanches (avec $k \leq b$). On note X le nombre de tirages ainsi effectués.

1. Déterminer la loi de X si les tirages sont effectués avec remise.
2. Même question sans remise.

6 Moments, fonction génératrice, fonction caractéristique

Exercice 23. ♣ – ●◐○ – *Caractérisation de la loi par les moments*

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles. On suppose $\forall k \in \mathbb{N}, E(X^k) = E(Y^k)$. Montrer que $X \sim Y$.

Exercice 24. ♣ – ●●○ – *Fonctions génératrices*

Si Z est une variable aléatoire à valeurs entières, on définit le polynôme

$$g_Z = E(X^Z) = \sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k)\, X^k \in \mathbb{R}[X],$$

et on l'appelle *fonction génératrice de* Z.

1. Montrer que la loi de Z est entièrement déterminée par g_Z.
2. Montrer que, si Z_1 et Z_2 sont indépendantes, alors $g_{Z_1+Z_2} = g_{Z_1} g_{Z_2}$.
3. Soit $Z \sim \mathscr{B}(n, p)$. Déterminer g_Z.
4. Retrouver grâce aux questions précédentes la loi de la somme $Z_1 + Z_2$, quand Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes telles que $Z_1 \sim \mathscr{B}(n_1, p)$ et $Z_2 \sim \mathscr{B}(n_2, p)$.
5. a) Montrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{10} X^k$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}[X]$ comme un produit de deux polynômes de degré 5.

   b) On lance deux dés à 6 faces et on note Y et Z les variables aléatoires des scores obtenus. On suppose Y et Z indépendantes mais on ne suppose rien sur leur loi. Montrer qu'il est impossible que $Y + Z \sim \mathscr{U}(\llbracket 2, 12 \rrbracket)$.

Exercice 25. ●◐○ – *Fonction caractéristique d'une variable aléatoire*

Soit X une variable aléatoire réelle. On note ϕ_X sa fonction caractéristique, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = E(e^{itX}).$$

1. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}, \phi^{(k)}(0)$.
2. On suppose X et Y indépendantes. Calculer Φ_{X+Y}.
3. Montrer que deux variables aléatoires ont même loi ssi elles ont même fonction caractéristique.
4. Déterminer la fonction caractéristique des variables aléatoires de lois usuelles.
5. Retrouver qu'une somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$ suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$.

Indications

Exercice 2. La loi conjointe de (X, Y) est dans ce cas déterminée par $P\big((X = 1) \cap (Y = 1)\big)$.

Exercice 18. Doit-on s'attendre à une symétrie dans le résultat ?

Exercice 20. Considérer les petites valeurs de n pour avoir une intuition du résultat. Puis récurrence, en pensant que $n + 1$ est aussi égal à $1 + n$.

Exercice 23. Que nous apprend la linéarité de l'espérance ?