Probabilités sur un univers fini – B

1 Inégalités en probabilités

Exercice 1. ●○○ – *Espérance et inverse*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Démontrer que $E(X) \geq \dfrac{1}{E\left(\frac{1}{X}\right)}$.

Exercice 2. ♣ – ●◐○ – *Inégalité de Jensen*

Soit X une variable aléatoire réelle et soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Montrer que $\phi\big(E(X)\big) \leq E\big(\phi(X)\big)$.

Exercice 3. ♣ – ●◐○ – *Probabilité que rien n'arrive*

Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènement mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des évènements A_k n'arrive est inférieure à $\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)$.

Exercice 4. ●●○ – *Inégalité de Kosmanek*

Soient A et B deux événements. Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \dfrac{1}{4}$.

Exercice 5. ♣ – ●●◐ – *Une inégalité étonnante*

Soient, dans un espace probabilisé fini (Ω, P), $A_1, \dots, A_n$ des événements. On définit, pour tout indice $k \in [\![1, n]\!]$, $C_k = \big\{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à au moins } k \text{ des événements } A_1, \dots, A_n\big\}$.
Montrer que $\prod_{k=1}^{n} P(C_k) \leq \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Exercice 6. ♣ – ●◐○ – *Inégalité de Paley-Zygmund*

Soient X une variable aléatoire réelle positive ou nulle pour laquelle $E(X^2) > 0$ et $\eta \in [0, 1]$.

1. Montrer que $E\left(X \mathbb{1}_{\{X \geq \eta E(X)\}}\right)^2 \leq E(X^2) P(X \geq \eta E(X))$.
2. En déduire que $P(X \geq \eta E(X)) \geq (1-\eta)^2 \dfrac{E(X)^2}{E(X^2)}$.

Exercice 7. ●●○ – *Concentration d'une loi binomiale*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne $X_n \sim \mathscr{B}(4n, 1/2)$.

1. Calculer la variance de X_n.
2. Montrer que la suite $\left(P(|X_n - 2n| \geq n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
3. Montrer que la suite $\left(P(|X_n - 2n| \leq n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$. Déterminer un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8. ●●○ – *Inégalité de Cantelli*

Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance V.

1. (a) Montrer que $\forall x \geq 0$, $P(X - m \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V + x^2}{(\varepsilon + x)^2}$.
   (b) En déduire que $P(X - m \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V}{V + \varepsilon^2}$ et que $P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{2V}{V + \varepsilon^2}$.
   (c) Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Retrouver le résultat précédent en remarquant que
$$E(\varepsilon + m - X) \leq E\big((\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon}\big),$$
et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon}$.

Exercice 9. ♣ – ●●○ – *Inégalité de Hoeffding*

1. Soit S_n une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n, p)$. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$,
$$\forall s \in \mathbb{R}_+, P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-nsa}\left(1 - p + pe^s\right)^n.$$
2. Parmi les majorations de la question précédente, identifier la plus précise.
3. Si $0 < q < p < 1$, on définit la *divergence de Kullback–Leibler*
$$D(p\|q) = (1-p)\ln\left(\frac{1-p}{1-q}\right) + p\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$
Exprimer $D(p\|q)$ comme une intégrale et en déduire que $D(p\|q) \geq 2(p-q)^2$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$.
5. Comparer cette inégalité à celle obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 10. ♣ – ●●◐ – *Inégalités de Khintchine*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher. On fixe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.

1. Déterminer l'espérance $E(S_n)$ et l'écart-type σ_n de S_n.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \leq \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.
3. En déduire que pour tout $\lambda > 0$, $E(e^{\lambda S_n}) \leq \exp\left(\frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2}\right)$.
4. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, $E(S_n^{2q}) \leq 2\frac{(2q)!}{\lambda^{2q}} \exp\left(\frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2}\right)$.
5. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on note $\|S_n\|_q = \left(E(S_n^q)\right)^{1/q}$. Montrer que $\|S_n\|_{2q} \leq 2\sqrt{eq}\sigma_n$.

2 Parties et fonctions aléatoires

Exercice 11. ●◐○ – *Dénombrement déguisé*

On tire uniformément et indépendamment deux parties A et B de $[\![1, n]\!]$.

1. Calculer $P(A \subset B)$.
2. Calculer $E(X)$, où $X = |A \cup B|$.

Exercice 12. ●◐○ – *Fonctions aléatoires entre ensembles finis*

Soient m et n deux entiers naturels non nuls. On munit $\mathscr{F}\left([\![1, m]\!], [\![1, n]\!]\right)$ de la probabilité uniforme.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de points de $[\![1, n]\!]$ sans antécédent.
   Déterminer $E(X) et V(X)$.
2. Soit Y la variable aléatoire donnant le cardinal de l'image d'un élément de $\mathscr{F}$.
   Déterminer $E(Y)$.
3. m personnes prennent place dans un ascenseur à l'étage 0, dans un immeuble de n étages.
   Combien y aura-t-il d'arrêts en moyenne ?

Exercice 13. ♣ – ●◐○ – *Maximum d'une partie aléatoire*

Soit $r \leq n$ deux entiers non nuls, et A une partie aléatoire de $[\![1, n]\!]$ de cardinal r, tirée uniformément. On note $X = \max A$.

1. Déterminer la loi de X. Quelle identité combinatoire obtient-on ?
2. Calculer l'espérance $E(X)$.
3. Calculer la variance $V(X)$.

Exercice 14. ♣ – ●◐○ – *Cardinal et somme d'une partie aléatoire*

Soit $n \geq 2$. On considère E une partie aléatoire de $[\![1, n]\!]$, tirée uniformément. On définit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement $A_i = (i \in E)$.

1. Déterminer la loi des indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$ et montrer qu'elles sont indépendantes.
2. On définit la variable aléatoire $N = |E|$. Exprimer N en fonction des indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$.
   En déduire sa loi, son espérance et sa variance.
3. On définit la variable aléatoire $T = \sum_{i \in E} i$. Exprimer T en fonction des indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$.
   En déduire son espérance et sa variance.

3 Vecteurs et matrices aléatoires

Exercice 15. ●◐○ – *Une matrice* 2×2 *est presque sûrement inversible*

On tire au sort (indépendamment et de façon équiprobable) quatre entiers $a, b, c, d \in [\![-n, n]\!]$. On note p_n la probabilité que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible. Montrer que p_n converge vers 1.

Exercice 16. ♣ – ●●○ – *Déterminants aléatoires (*pour plus tard*)*

Soient $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher. On considère la matrice aléatoire $M = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $D = \det M$.
Calculer l'espérance et la variance de D.

Exercice 17. ●●○ – *Vecteurs aléatoires*

Soient $A \neq B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, soient $X_1, \ldots, X_p$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(1/2)$. On note $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_p \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $P(AX = BX) \leq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 18. ●●○ – *Matrices aléatoires symétriques*

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$.
On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = UU^T$.

1. Déterminer la loi de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Quelle est la probabilité pour que M soit une matrice de projection ?

Exercice 19. ●●○ – *Inversibilité de matrices aléatoires*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $A_n, B_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi : $\mathcal{B}(1/2)$ pour A_n et Rademacher pour B_n. On note a_n et b_n les probabilités que A_n et B_n soient inversibles.

1. Montrer que $a_n = b_{n+1}$.
2. Montrer que $a_n \geq \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$.

4 Permutations et graphes aléatoires

Exercice 20. ♣ – ●●○ – *Échanges de places*

Un train contient n places numérotées et n voyageurs possèdent un billet. Le premier voyageur monte dans le train mais se place au hasard. Puis, chaque personne s'installe à sa place si elle est libre et choisit une place libre au hasard sinon.
Quelle est la probabilité que la dernière personne se trouve à sa place ?

Exercice 21. ●●○ – *Produit de transpositions aléatoires*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $U_1, \ldots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, U_i suit la loi uniforme sur $[\![1, i]\!]$. On pose $\sigma_n = (1, U_1) \circ (2, U_2) \cdots \circ (n, U_n)$, où (a, b) désigne la transposition échangeant a et b. Déterminer la loi de σ_n.

Exercice 22. ♣ – ●●◐ – *Sous-groupes transitifs de $\mathscr{S}_n$*

Un sous-groupe H de $\mathscr{S}_n$ est dit *transitif* si $\forall x, y \in [\![1, n]\!], \exists \sigma \in H : \sigma(x) = y$.

1. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. À quelle condition le sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ engendré par σ est-il transitif ?
2. On considère une variable aléatoire X_n de loi uniforme sur $\mathscr{S}_n$.

   Calculer la probabilité p_n que le sous-groupe $\langle X_n \rangle$ engendré par X_n soit transitif.
3. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n de loi uniforme sur $\mathscr{S}_n$.

   On note q_n la probabilité que le sous-groupe $\langle X_n, Y_n \rangle$ engendré par X_n et Y_n soit transitif. Montrer que q_n converge vers 1.

Exercice 23. ♣ – ●●◐ – *Permutations aléatoires*

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère une permutation aléatoire Σ, c'est-à-dire une variable aléatoire $\Sigma \sim \mathscr{U}(\mathscr{S}_n)$.

1. **Images de 1 et 2. Nombre d'inversions.**
   - (a) Calculer $P\big(\Sigma(1) < \Sigma(2)\big)$.
   - (b) Les variables $\Sigma(1)$ et $\Sigma(2)$ sont-elles indépendantes ?
   - (c) Donner les lois de $\Sigma(1)$ et $\Sigma(2)$, ainsi que leur loi conjointe.
   - (d) Calculer la probabilité que $\Sigma(1)$ et $\Sigma(2)$ soient des entiers voisins.
   - (e) Calculer l'espérance du nombre d'inversions de Σ.
2. **Points fixes.** Déterminer l'espérance et la variance du nombre de points fixes de Σ.
3. **Montées.** La *première montée* d'une permutation σ est le plus grand intervalle entier de la forme $[\![1, k]\!]$ sur lequel la restriction σ est croissante.

   Déterminer la loi et l'espérance de la longueur de la première montée de Σ.
4. **Records.** Étant donné une permutation σ, on dit que $i \in [\![1, n]\!]$ est un *record* pour σ si

$$\forall j \in [\![1, n]\!], i < j \implies \sigma(i) < \sigma(j).$$

(a) Calculer l'espérance et la variance du nombre R_n de records de Σ.

(b) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\dfrac{X_n}{\ln n} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0$, quand $n \to +\infty$.

5. **Cycles.** Soit $C \subset [\![1, n]\!]$ une partie non vide. On dira pour abréger que C *est un cycle* d'une permutation pour dire que c'est l'un des cycles de la décomposition en cycles disjoints de cette permutation.

   (a) Calculer la probabilité que C soit un cycle de Σ.

   (b) Calculer la probabilité que 1 et 2 appartiennent au même cycle de Σ.

   (c) Calculer la loi de la longueur du cycle de Σ contenant 1.

Exercice 24. ♣ – ●●◐ – *Ensembles indépendants d'un graphe aléatoire*

Un *ensemble indépendant* dans un graphe est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents (de telle sorte que le graphe induit n'ait aucune arête). Le *nombre d'indépendance* $\alpha(\Gamma)$ d'un graphe est le cardinal maximal d'un tel ensemble indépendant.
Soit Γ un graphe à n sommets et $\dfrac{nd}{2}$ arêtes (où $d \geq 1$).
On définit un ensemble aléatoire de sommets X en demandant que chaque sommet du graphe appartienne à X avec probabilité p et indépendamment des autres.
On retire ensuite (selon une procédure choisie à l'avance) à X un nombre minimal de sommets de telle sorte à obtenir un ensemble indépendant $U \subset X$.

1. Montrer que $E(|U|) \geq np - \dfrac{p^2 nd}{2}$.

2. Optimiser cette borne et en déduire une minoration de $\alpha(\Gamma)$.

Exercice 25. ♣ – ●●◐ – *Ensemble dominant dans un graphe aléatoire*

Dans un graphe, un *ensemble dominant* est un ensemble de sommets U tel que tout sommet du graphe soit dans U ou adjacent à un sommet de U.
Soit Γ un graphe à n sommets et $p \in [0, 1]$.
On définit un ensemble aléatoire de sommets X en demandant que chaque sommet du graphe appartienne à X avec probabilité p et indépendamment des autres.
On définit alors l'ensemble Y des éléments de Γ qui ne sont ni dans X ni adjacents à un élément de X. Par construction, l'ensemble aléatoire $U = X \sqcup Y$ est un ensemble dominant.

1. Déterminer $E(|U|)$ en fonction de l'application $d : \Gamma \to \mathbb{N}$ associant à chaque sommet son degré.

2. Dans la suite, on pose δ le degré minimal d'un sommet de Γ. Montrer que
$$E(|U|) \leq n\left[p + e^{-p(\delta+1)}\right].$$

3. Optimiser cette borne et en déduire une majoration du cardinal minimum $\gamma(\Gamma)$ d'un ensemble dominant de Γ.

5 Autres exercices

Exercice 26. ♣ – ●◐○ – *Variable aléatoire uniforme dans un groupe fini*

Soit $(G, *)$ un groupe fini. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme dans G, soit Y une variable aléatoire quelconque dans G, indépendante de X. Montrer que la variable aléatoire $Z = X * Y$ suit une loi uniforme dans G.

Exercice 27. ♣ – ●●○ – *Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$*

Soient $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher. On définit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. On pose $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
   Quelle est la loi de T_n ? En déduire la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. Trouver un équivalent de $P(S_{2n} = 0)$ quand n tend vers $+\infty$.
   On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
3. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\big(|S_n| \geq n^{1/2+\varepsilon}\big) \to 0$, quand n tend vers $+\infty$.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $E\big(\exp(t\dfrac{S_n}{\sqrt{n}})\big)$ converge quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 28. ●●○ – *Gros ensembles sans somme*

Une partie S d'un groupe abélien $(A, +)$ est dite *sans somme* si $\forall a, b \in S, a + b \notin S$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 3k + 2$ soit premier. On considère $A \subset (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ et $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
   On note $B_0 \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes modulo p des éléments de $[\![k+1, 2k+1]\!]$.
   Montrer que l'ensemble $B = A \cap (xB_0)$ est sans somme.
2. On admet qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.
   Soit $A \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ finie non vide. Montrer qu'il existe $B \subset A$ sans somme tel que $|B| > \dfrac{|A|}{3}$.
3. Montrer le fait admis à la question précédente.

Indications

Exercice 3. Utiliser $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 11. Pour le 1., cela revient à compter le nombre de couples (A, B) tels que $A \subset B$.

Exercice 13. Il est plus agréable de considérer $P(X \leq k)$, plutôt que $P(X = k)$.

Exercice 15. Si a est non nul et que a, b et c sont fixés, au plus une valeur de d est telle que la matrice est non inversible. En déduire une minoration de p_n.

Exercice 20. Une certaine symétrie dans le problème devrait rendre le résultat intuitif. C'est plus dur à formaliser...