# Algèbre linéaire - Déterminants

## 1 Groupe symétrique

**Exercice 1.** ◐○○ – *Décomposition en produit de cycles*

Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints.
En déduire leur signature et leur puissance 23.

1. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 8 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
2. $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 2.** ♣ – ●◐○ – *Des générateurs de $\mathscr{S}_n$*

1. Montrer que les transpositions de la forme $(1\,i)$ avec $i \in [\![2, n]\!]$ engendrent $\mathscr{S}_n$.
2. Montrer que les deux permutations $(1\,2)$ et $(1\,2\,\dots\,n)$ engendrent $\mathscr{S}_n$.

**Exercice 3.** ●◐○ – *Ordre d'une permutation*

1. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Déterminer l'ordre de $\sigma$ en fonction de la longueur des cycles intervenant dans la décomposition de $\sigma$ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 12 dans $\mathscr{S}_7$ ?

**Exercice 4.** ♣ – ●◐○ – *Morphismes de $\mathscr{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$*

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que $(k\,l) = (j\,l)(i\,k)(i\,j)(i\,k)(j\,l)$ si $i, j, k, l$ sont deux à deux distincts dans $[\![1, n]\!]$.
2. Deux éléments $g$ et $g'$ d'un groupe $G$ sont conjugués s'il existe $h \in G$ tel que $g = hg'h^{-1}$. Montrer que deux transpositions quelconques sont conjuguées.
3. Soit $\phi : \mathscr{S}_n \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes. On fixe une transposition $\tau$.

   Montrer que $\phi(\tau) = \pm 1$ et que, pour toute autre transposition $\tau'$, $\phi(\tau) = \phi(\tau')$.
4. En déduire que les seuls morphismes de groupe de $\mathscr{S}_n$ vers $\mathbb{C}^*$ sont l'application constante égale à 1 et la signature.

**Exercice 5.** ●◐○ – *Centre de $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$*

1. Soit $n \geq 3$. Soient $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$, soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Que vaut $\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1}$ ?

2. En déduire que le centre de $\mathscr{S}_n$ est trivial.

3. Montrer que si $n \geq 4$, le centre de $\mathscr{A}_n$ est trivial.

**Exercice 6.** ♣ – ●◐○ – *Classes de conjugaison dans $\mathscr{S}_n$*

1. Soit $\tau = (i_1\ i_2\ \dots\ i_p)$ un $p$-cycle de $\mathscr{S}_n$, soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Que vaut $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ ?

2. En déduire que deux permutations de $\mathscr{S}_n$ sont conjuguées ssi, dans leur décomposition en produit de cycles à support disjoint, il y a le même nombre de $p$-cycles, pour tout $p \in [\![2, n]\!]$.

**Exercice 7.** ♣ – ●●◐ – *Automorphismes de $\mathscr{S}_n$*

On cherche à caractériser les automorphismes de $\mathscr{S}_n$, pour $n \neq 6$. Soit $\phi$ un tel automorphisme.

1. Si $\tau$ est une transposition de $\mathscr{S}_n$, que dire de l'ordre de $\phi(\tau)$ ?

2. En raisonnant sur le nombre d'éléments commutant avec $\tau$ et sur le nombre d'éléments commutant avec $\phi(\tau)$, montrer que $\phi(\tau)$ est une transposition.

3. En déduire que $\phi$ est un automorphisme intérieur : il existe $\alpha \in \mathscr{S}_n$ tel que $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n, \phi(\sigma) = \alpha\sigma\alpha^{-1}$. Conclure.

**Exercice 8.** ●●◐ – *Jeu de taquin*

Vous venez d'obtenir ce jeu de taquin dans votre paquet de céréales. Pouvez-vous le résoudre ?

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 |
| 5 | 2 | 7 |
| 8 | 6 | |

**Exercice 9.** ♣ – ●●● – *L'énigme des* 100 *prisonniers*

100 prisonniers sont enfermés dans une pièce. Dans une autre pièce se trouvent 100 coffres numérotés de 1 à 100, chaque coffre renfermant le nom de l'un des prisonniers. A tour de rôle, chaque prisonnier se rendra dans la salle des coffres ; il pourra ouvrir successivement jusqu'à 50 coffres, en consultant chaque fois le nom qui s'y trouve.
L'ensemble des prisonniers sera libéré si chacun a découvert son propre nom, lors de son passage dans la salle des coffres. Ils peuvent décider d'une stratégie avant que le premier prisonnier aille dans la salle, mais ils ne peuvent plus communiquer ensuite (et les coffres sont refermés après chaque passage).
La situation est-elle désespérée ?

## 2 Exercices théoriques

**Exercice 10.** ●○○ – *Déterminant d'une matrice à coefficients entiers*

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que si tous les coefficients de $A$ sont pairs, alors $2^n$ divise $\det(A)$.
2. Montrer que si tous les coefficients de $A$ sont impairs, alors $2^{n-1}$ divise $\det(A)$.

**Exercice 11.** ●◐○ – *Déterminant de $M \mapsto M^T$*

Calculer le déterminant de l'endomorphisme $\phi$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\phi(M) = M^T$.

**Exercice 12.** ♣ – ●◐○ – *Semblables dans $\mathbb{C}$, semblables dans $\mathbb{R}$*

Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elles sont semblables sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On écrit $P = P_1 + iP_2$, avec $P_1$ et $P_2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, si $P_t = P_1 + tP_2$, alors $AP_t = P_tB$.
2. Montrer qu'on peut choisir $t$ tel que $P_t$ est inversible.
3. En déduire que $A$ et $B$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 13.** ♣ – ●◐○ – $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est ouvert dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, A + tB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 14.** ●◐○ – *Matrices par blocs*

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.
Montrer que si $CD = DC$, alors $\det M = \det(AD - BC)$.

**Exercice 15.** ●◐○ – *Formules de Cramer*

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, soit $B \in \mathbb{K}^n$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de $A$ et $X = (x_1 \ldots x_n)^T$ l'unique solution de $AX = B$. Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \dfrac{1}{\det A} \times \det(C_1, \ldots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \ldots, C_n)$.

**Exercice 16.** ●◐○ – *Une inégalité avec une matrice de rang* 1

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $B$ de rang 1. Montrer que $\det\big((A+B)(A-B)\big) \leq (\det A)^2$.

**Exercice 17.** ♣ – ●●○ – *Liberte d'une famille de fonctions*

Soient $X$ un ensemble, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.
Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre ssi $\exists x_1, \ldots, x_n \in X : \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 18.** ♣ – ●●○ – $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$

On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients entiers de déterminant 1.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe, pour la multiplication matricielle.
2. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^\times$.
3. Que dire du PGCD des éléments d'une ligne/colonne d'une matrice de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ ?
4. Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un produit de matrices $I_2 + \pm E_{i,j}$, où $i$ et $j$ sont distincts dans $\{1,2\}$. Généraliser à $n \geq 2$.

**Exercice 19.** ♣ – ●●○ – *Trace et déterminant*

Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$. Soit $\mathbf{e}$ une base de $E$. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ : $\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, f(x_k), \ldots, x_n) = \mathrm{Tr}(f) \det_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, x_n)$.

**Exercice 20.** ●●○ – *Déterminant et matrice nilpotente*

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.

1. Que vaut $\det N$ ?
2. Que vaut $\det(I_n + N)$ ?
3. Soit $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $UN = NU$. Montrer que $\det(U + N) = \det U$.

**Exercice 21.** ●●○ – *Rang de la comatrice*

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de $A$.

**Exercice 22.** ♣ – ●●○ – *Densité de Zariski, comatrices*

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini.

1. Montrer que si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}\, A\, \mathrm{Com}\, B$.
2. En considérant $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que l'égalité demeure si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que le résultat reste vrai si $\mathbb{K}$ est un corps fini.

**Exercice 23.** ♣ – ●●○ – *Résultant de deux polynômes*

Soient $F, G$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés respectifs $n$ et $m$. On considère l'application

$$\left\{ \begin{array}{llll} \Phi : & \mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n+m-1} \\ & (U, V) & \longmapsto & UF + VG \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\Phi$ est bien définie et linéaire.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur $F$ et $G$ pour qu'elle soit injective.

2. Donner la matrice de $\Phi$ dans les bases canoniques.

On appelle *résultant* de $U$ et $V$ le déterminant de cette matrice.

3. On appelle *discriminant* du polynôme $P$ le résultant de $P$ et $P'$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur $P$ pour que son discriminant soit nul.

4. Déterminer le discriminant de $aX^2 + bX + c$ et de $X^3 + pX + q$.

**Exercice 24.** ♣ – ●●◐ – *Marchand de cailloux*

Un bijoutier vend $2n+1$ pierres précieuses. On suppose que, chaque fois qu'on retire une pierre précieuse, on peut partager les $2n$ autres en deux tas de $n$ pierres de même valeur.
Montrer que toutes les pierres précieuses ont la même valeur.

## 3 Calculs concrets

**Exercice 25.** ●○○ – *Intégration de polynômes*

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $I_P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, I_P(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,dt.$$

2. Montrer que $P \mapsto I_P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son déterminant.

**Exercice 26.** ●○○ – *Dérivation*

Soit $E = \{x \mapsto P(x)e^x, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $E$.

2. Calculer son déterminant.

**Exercice 27.** ♣ – ●○○ – *Des factorisations astucieuses*

Exprimer sous forme factorisée :

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \end{vmatrix}$

**Exercice 28.** ♣ – ●◐○ – *Déformation de $I_n$ par une matrice de rang* 1

Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Calculer $\det(I_n + XY^T)$.

**Exercice 29.** ●◐○ – *Déterminant du produit matriciel*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de $\phi_{A,B} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, définie par $\phi_{A,B}(M) = AMB$.

**Exercice 30.** ●●○ – *Calculs - 1*

Calculer le déterminant de $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dans chacun des cas suivants ($\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$) :

1. $a_{i,j} = \max(i,j)$
2. $a_{i,j} = \min(i,j)$
3. $a_{i,j} = |i-j|$
4. $a_{i,j} = \delta_{i,j} + \alpha_i \beta_j$
5. $a_{i,j} = (\alpha_i + \beta_j)^{n-1}$
6. $a_{i,j} = 1 + \alpha_i^j$

**Exercice 31.** ♣ – ●●○ – *Calculs - 2*

Calculer les déterminants suivants : ($A_n$, $B_n$ et $C_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

1. $A_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \ddots & \vdots \\ n & n & 3 & \ddots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$

2. $B_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $C_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ b & b & a & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & b & a \end{vmatrix}$

**Exercice 32.** ●●○ – *Calculs - 3*

Soit $n \geq 2$, soit $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$.
Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{i,j} = P(i+j-1)$.

**Exercice 33.** ●●○ – *Une relation de récurrence*

On considère la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ égale à

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & 0 \\ 0 & c & a & b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \dots & \dots & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 pour la suite $\det(M_n)$.
2. En déduire la valeur de $\det(M_n)$ dans le cas particulier où il existe deux scalaires $x$ et $y$ tels que $c = 1$, $a = x + y$ et $b = xy$.

**Exercice 34.** ♣ – ●●○ – *Vandermonde lacunaire*

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{k-1} & a_1^{k-1} & \cdots & a_{n-1}^{k-1} \\ a_0^{k+1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_{n-1}^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n \end{pmatrix};$$

**Exercice 35.** ♣ – ●●○ – *Déterminant d'une matrice circulante*

On cherche à calculer le déterminant de la *matrice circulante* suivante

$$C(a_0,\dots,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On utilise pour ce faire une méthode polynomiale et on remplace $a_0$ par une variable $x \in \mathbb{K}$.

1. Justifier que l'application $P : x \mapsto \det\big(C(x, a_1,\dots,a_{n-1})\big)$ est polynomiale de degré $n$ et préciser son coefficient dominant.
2. On note $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les quantités $c_k = -\sum_{j=1}^{n-1} a_j \omega_k^j$ sont des racines de $P$.
3. On suppose pour simplifier que les $c_k$ sont deux à deux distincts. Donner la forme factorisée de $P$ et en déduire la valeur de $\det\big(C(a_0,\dots,a_{n-1})\big)$.
4. Montrer que le résultat précédent reste vrai si on ne suppose plus les $c_k$ deux à deux distincts.

**Exercice 36.** ●●● – *Déterminant de Smith*

Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à $i$ et $j$.

# Indications

**Exercice 2.** Montrer que les transpositions $(1\,i)$ engendrent toutes les transpositions. Puis que les deux permutations $(1\,2)$ et $(1\,2\dots n)$ engendrent les transpositions $(1\,i)$.

**Exercice 8.** Coder une position de taquin par une permutation et montrer que la signature de cette permutation est invariante lors d'un déplacement du taquin.

**Exercice 12.** Pour 2., considérer l'application $t \mapsto \det(P_t)$

**Exercice 14.** Commencer par le cas où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 17.** Raisonner par récurrence et considérer le déterminant de la matrice avec $x_1,\dots,x_{n-1}$ fixés et $x_n$ variable.

**Exercice 19.** Montrer que le membre de gauche – vue comme fonction de $(x_1,\dots,x_n)$ – définit une forme $n$-linéaire alternée sur $E$.

**Exercice 21.** Le rang de $A$ est la taille maximale d'une matrice carrée inversible extraite de $A$.

**Exercice 34.** Considérer cette matrice comme une matrice $(n-1)\times(n-1)$ extraite d'une matrice de Vandermonde $n \times n$, avec un coefficient variable.

**Exercice 35.** Pour 3., introduire le polynôme $Q = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$.