DM 23 - Déterminant de Cauchy - Théorème de Cayley-Hamilton

1 Déterminant de Cauchy

On se donne $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_i+b_j \neq 0$. On cherche à calculer le déterminant Δ_n de la matrice $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de terme général $C_{i,j} = \dfrac{1}{a_i+b_j}$.

1. Que vaut Δ_n s'il existe deux indices $i \neq i' \in [\![1,n]\!]$ tels que $a_i = a_{i'}$?
2. On suppose désormais les a_i deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que
$$R(X) = \frac{(b_1-X)\dots(b_{n-1}-X)}{(X+a_1)\dots(X+a_n)} = \frac{\lambda_1}{X+a_1}+\dots+\frac{\lambda_n}{X+a_n}.$$
3. Déterminer pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ la valeur de λ_k.
4. On note $L_1,\dots,L_n$ les lignes de C. En opérant sur les lignes de C pour transformer L_n en $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i$, montrer que
$$\lambda_n\Delta_n = R(b_n)\Delta_{n-1},$$
où Δ_{n-1} est le déterminant de $(C_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-1}$.
5. En déduire par récurrence la valeur de Δ_n.

2 Théorème de Cayley-Hamilton

2.1 Matrice compagne

Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$, à coefficients dans $\mathbb{K}$. La *matrice compagne*[1] de P est la matrice $C_p \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbf{e} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et on identifie $\mathbb{K}^n$ à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la valeur de $C_P^k e_1$.

[1] La terminologie *matrice compagnon* est plus usuelle, mais elle est assez curieuse.

2. Montrer que $P(C_P)e_1 = 0$.

3. En déduire que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(C_p)e_k = 0$, puis que $P(C_P) = 0$.

4. Montrer que P est le polynôme minimal de C_P.

2.2 Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.On définit le *polynôme caractéristique* de A par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$. Plus précisément, on note pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j} = \delta_{i,j}X - a_{i,j} \in \mathbb{K}_1[X]$ et alors

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) p_{\sigma(1),1} \dots p_{\sigma(n),n}.$$

5. Montrer que χ_A est un polynôme unitaire de degré n.

6. Montrer que les racines de χ_A sont les valeurs propres de A.

7. En déduire que si χ_A est scindé à racines simples, alors A est semblable à une matrice diagonale. Que dire de la réciproque ?

8. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, on peut donc définir son polynôme caractéristique χ_f, comme le polynôme caractéristique de $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(f)$, $\mathbf{e}$ étant une base quelconque de E.

9. **Exemples :**
   (a) On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r et vérifie $A^2 = A$. Déterminer χ_A.
   (b) On suppose que $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $B^2 = I_n$ et que $\dim \mathrm{Ker}(S - I_n) = r$. Déterminer χ_B.

10. Soit f un endomorphisme de E, soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. On note $f_F \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme induit par f sur F. Montrer que χ_{f_F} divise χ_f.

2.3 Théorème de Cayley-Hamilton

On propose une démonstration du théorème de Cayley[2]-Hamilton[3] :
Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $\chi_f(f) = 0$.

11. Soit P un polynôme unitaire de degré n ; on note C_P sa matrice compagne. Montrer que $P = \chi_{C_P}$. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton pour C_P.

12. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, soit $x \in E \setminus \{0\}$. On note $E_x = \mathrm{Vect}\big((f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}\big)$.
    (a) Montrer que E_x est stable par f et qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\big(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x)\big)$ est une base de E_x.
    (b) Écrire la matrice de f_{E_x} dans cette base.
    (c) En déduire que $\chi_{f_{E_x}}(f_{E_x}) = 0$.

13. Conclure la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

---

[2]Arthur Cayley, 1821-1895
[3]William Hamilton, 1805-1865