DM 23 - Déterminant de Cauchy - Théorème de Cayley-Hamilton

1 Déterminant de Cauchy

1. S'il y a deux indices $i \neq i'$ tels que $a_i = a_{i'}$, alors les lignes i et i' de C sont les mêmes, dont $\Delta_n = 0$.

2. La fraction rationnelle $R(X)$ est de degré $(n-1) - n = -1$. Son dénominateur est de degré n et a pour racines $-a_1, \ldots, -a_n$, toutes simples car les a_i sont deux à deux distincts. Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que
$$R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X + a_k}.$$

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On multiplie les deux membres de l'égalité précédente par $X + a_k$. Alors $-a_k$ n'est plus un pôle des fractions obtenues ; on évalue en $-a_k$ et on trouve :
$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i + a_k)}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}}(a_j - a_k)} = \lambda_k.$$

4. Considérons la combinaison linéaire $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$. Son coefficient en colonne j est $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{a_i + b_j} = R(b_j)$. Par construction des λ_i, on a $R(b_j) = 0$ si $j \leq n-1$.

   Considérons maintenant la matrice $\tilde{C}$ obtenue en multipliant la dernière ligne de C par λ_n. Par linéarité par rapport à la dernière ligne, $\det(\tilde{C}) = \lambda_n \Delta_n$.

   De plus, ajouter à la dernière ligne une combinaison linéaire des autres ne modifie pas le déterminant. Donc $\det(\tilde{C})$ est aussi le déterminant de la matrice :
$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1 + b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & R(b_n) \end{pmatrix}$$
   obtenue en modifiant la dernière ligne de $\tilde{C}$ (donc $\lambda_n L_n$) par $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.

   Cette matrice est triangulaire par blocs (*ou bien on développe selon la dernière ligne/colonne*) et donc son déterminant vaut $R(b_n)\Delta_{n-1}$.

   Donc, $\lambda_n \Delta_n = R(b_n)\Delta_{n-1}$.

5. Par hypothèse, tous les scalaires $a_i + b_j$ sont non nuls. En particulier, $\lambda_n \neq 0$ et on peut réécrire l'identité précédente sous la forme :

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \frac{R(b_n)}{\lambda_n} = \frac{\prod_{1\le j\le n-1}(a_j - a_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i + a_n)} \frac{\prod_{1\le j\le n-1}(b_j - b_n)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)}.$$

Le numérateur peut être réécrit $\prod\limits_{1\le j\le n-1}(a_j - a_n)(b_j - b_n)$. Le dénominateur est le produit des termes $a_i + b_j$, avec l'un des indices i ou j égal à n.

De plus, $\Delta_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, avec par convention $\Delta_0 = 1$ (déterminant de la matrice de taille 0). Avec un peu de réflexion, on conjecture que le produit téléscopique donne la formule suivante :

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1\le j<i\le n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\le i,j\le n}(a_i + b_j)}.$$

Si on n'est pas tout à fait convaincu, on peut montrer la formule par récurrence. On trouve bien $\Delta_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$ *(le produit du haut est vide) et il s'agit alors de vérifier que, si* T_n *est l'expression de droite, alors* $\frac{T_n}{T_{n-1}}$ *donne bien l'expression trouvée pour* $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$*, ce qui ne pose pas de difficultés.*

Remarque : on constate immédiatement que le déterminant est nul ssi deux a_i ou deux b_i sont égaux. Seule une implication était évidente (*comme pour la matrice de Vandermonde*).

2 Théorème de Cayley-Hamilton

2.1 Matrice compagne

1. Une simple lecture matricielle nous apprend que $C_P e_j = e_{j+1}$ si $j \in [\![1, n-1]\!]$ et que $C_P e_n = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i$. On en déduit (récurrence immédiate) que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], C_P^k e_1 = e_{k+1}$ et que $C_P^n e_1 = C_P e_n = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i$.

2. On calcule :
$$P(C_P)e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k C_P^k e_1 + C_P^n e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} - \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i = 0.$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les matrices C_P^k et $P(C_P)$ commutent. Donc, si $k \in [\![1, n]\!]$,
$$P(C_P)e_k = P(C_P)C_P^{k-1}e_1 = C_P^{k-1}P(C_P)e_1 = 0.$$
Comme $P(C_P)$ s'annule sur tous les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $P(C_P) = 0$.

4. P est un polynôme unitaire de degré n, qui annule C_P. Pour montrer que c'est le polynôme minimal de C_P, il suffit de montrer qu'aucun polynôme non nul de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ n'annule C_P. Soit $Q = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

On a $Q(C_P)e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{k+1}$ d'après les questions précédentes. Par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$, ce vecteur est nul ssi tous les a_k sont nuls. Donc, le seul polynôme de degré $\leq n-1$ annulant C_P est le polynôme nul.

Donc, P est le polynôme minimal de C_P.

2.2 Polynôme caractéristique

5. Tous les $p_{i,j}$ sont des polynômes. Comme χ_A est une combinaison linéaire de produits de $p_{i,j}$ c'est aussi un polynôme.

   De plus, les $p_{i,j}$ sont de degré 1 ou 0 : 1 exactement quand $i = j$. On en déduit d'une part que chaque produit $p_{\sigma(1),1} \dots p_{\sigma(n),n}$ est de degré au plus n, et qu'il est de degré n exactement quand $\sigma = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$.

   Ceci montre que χ_A est de degré n et que son coefficient dominant est le même que celui de $\varepsilon(\mathrm{id}) p_{1,1} \dots p_{n,n}$, c'est-à-dire 1.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = 0 &\iff \det(\lambda I_n - A) = 0 \\
&\iff \lambda I_n - A \text{ n'est pas inversible} \\
&\iff \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \neq 0 \\
&\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) - \{0\} : (\lambda I_n - A)X = 0 \\
&\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) - \{0\} : AX = \lambda X \\
&\iff \lambda \text{ est valeur propre de } A.
\end{aligned}$$

7. Si χ_A est scindé à racines simples, A a n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On considère $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ des vecteurs propres correspondants. On a alors montré dans le cours que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{K}^n$, puisqu'elle est formée de n vecteurs et que $\mathbb{K}^n$ est de dimension n.

   Si on note D la matrice dans la base $(v_1, \dots, v_n)$ de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, D est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (puisque pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Av_k = \lambda_k v_k$).

   Et d'après le cours, A est semblable à D. *On a $A = P^{-1}DP$ si P est la matrice de passage de la base canonique $(e_1, \dots, n_n)$ vers $(v_1, \dots, v_n)$.*

   La réciproque est fausse. La matrice nulle est semblable à une matrice diagonale (elle est elle-même diagonale) mais son polynôme caractéristique est X^n, qui n'est pas à racines simples.

8. Considérons A et B deux matrices semblables. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Soit $x \in \mathbb{K}$. On a l'égalité

$$xI_n - A = P^{-1}(xI_n - B)P,$$

   car $P^{-1} \times xI_n \times P = xI_n$. En prenant les déterminants, on a donc :

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \det(P^{-1})\det(xI_n - B)\det(P))\det(xI_n - B) = \chi_B(x),$$

car $\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$. Ainsi, les applications polynomiales associées à χ_A et χ_B sont égales. Si $\mathbb{K}$ est infini (*on peut s'en contenter !*), on sait que cela implique que les polynômes χ_A et χ_B sont égaux.

Si $\mathbb{K}$ est fini, on remarque que $\mathbb{K}$ peut être vu comme un sous-corps d'un corps infini $\mathbb{L}$ (p. ex. $\mathbb{K}(X)$). La même preuve montre alors que les applications polynomiales associées à χ_A et χ_B, vus comme des polynômes de $\mathbb{L}[X]$, sont égales, donc χ_A et χ_B sont égaux.

Remarque : on rappelle que dans le cadre du programme, on peut toujours supposer que $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, voire exceptionnellement $\mathbb{Q}$. La subtitlité avec les corps finis n'est donc pas très importante. Par contre, on prend garde à bien distinguer égalité entre polynômes et égalité entre fonctions polynomiales associées (même si à la fin, les deux sont équivalentes).

9. **Exemples :**

   (a) A est la matrice d'un projecteur de rang r. On a vu qu'alors, A est semblable à la matrice diagonale D avec r valeurs 1 et $n-r$ valeurs 0 sur la diagonale. Donc,
   $$\chi_A = \chi_D = (X-1)^r X^{n-r}.$$

   (b) B est la matrice d'une symétrie par rapport à un sous-espace de dimension r. Donc, B est semblable à la matrice diagonale D' avec r valeurs 1 et $n-r$ valeurs -1 sur la diagonale. Donc,
   $$\chi_B = \chi_{D'} = (X-1)^r (X+1)^{n-r}.$$

10. On considère $(f_1,\dots,f_r)$ une base de F, qu'on complète en une base $(f_1,\dots,f_r,g_{r+1},\dots,g_n)$ de E. Notons A_F la matrice de f_F dans la base $(f_1,\dots,f_r)$ et A la matrice de f dans la base $(f_1,\dots,f_r,g_{r+1},\dots,g_n)$. Alors, A s'écrit par blocs :
   $$A = \begin{pmatrix} A_F & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$
   où $C \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a aussi :
   $$xI_n - A = \begin{pmatrix} xI_r - A_F & C \\ 0 & xI_{n-r} - D \end{pmatrix}.$$
   D'où l'on tire $\det(xI_n - A) = \det(\chi I_r - A_F)\det(xI_{n-r} - D)$. En notant P l'application polynomiale $x \mapsto \det(xI_{n-r} - D)$, on a donc :
   $$\forall x \in \mathbb{K}, \chi_A(x) = \chi_{A_F}(x)P(x).$$
   Comme précédemment, cette égalité entre applications polynomiales induit une égalité entre polynômes : $\chi_A = \chi_{A_F} P$. Donc χ_{A_F} divise χ_A.

2.3 Théorème de Cayley-Hamilton

11. Soit $x \in \mathbb{K}$. On considère la matrice $C_P(x) = xI_n - C_P$. On a :
   $$C_P(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1}+x \end{pmatrix}.$$

On calcule son déterminant en développant selon la première colonne : on a

$$\det\big(C_P(x)\big) = x\begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1}+x \end{vmatrix}.$$

Le deuxième déterminant se calcule en développant selon la première ligne : il vaut

$$a_0(-1)^{1+(n-1)}\det(-I_{n-2}) = a_0.$$

En notant Q le polynôme $Q = X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1}X^k$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \det\big(C_P(x)\big) = x \times \det\big(C_Q(x)\big) + a_0.$$

On peut alors procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que si P est un polynôme unitaire de degré n, alors $\forall x \in \mathbb{K}, \chi_{C_P}(x) = P(x)$.

Si $n = 1$ et $P = X + a_0$, $C_P(x) = (a_0 + x)$ et donc $\chi_{C_P}(x) = a_0 + x = P(x)$.

Si le résultat est montré pour tout polynôme de degré $n-1$ et si P est de degré n, on a, avec les notations précédentes : $\chi_{C_P}(x) = x \times \chi_{C_Q}(x) + a_0$. Or, par hypothèse de récurrence, $\chi_{C_Q}(x) = Q(x)$ et on a bien $P(x) = xQ(x) + a_0$, ce qui conclut.

On a donc montré que pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\chi_{C_P}(x) = P(x)$. Comme précédemment, on en déduit que cette égalité entre fonctions polynomiales induit une égalité polynomiale $\chi_{C_P} = P$.

On a montré précédemment que $P(C_P) = 0$, donc $\chi(C_P)(C_P) = 0$, ce qui montre le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices compagnes.

12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $f(f^n(x)) = f^{n+1}(x) \in E_x$. Comme E_x est engendré par les $f_n(x)$, ceci montre que $f(E_x) \subset E_x$.

Comme E est de dimension finie, la famille $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas liée. On considère le plus grand entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ est libre. Alors, $f^r(x)$ est combinaison linéaire de cette famille (sinon on contredirait la maximalité de r). On peut donc trouver des scalaires $a_0, \dots, a_{r-1}$ tels que

$$f^r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k f^k(x).$$

On note P le polynôme $X^r - \sum_{k=0}^{r-1} X^k$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de X^n par P :

$$X^n = Q \times P + R,$$

avec $\deg R \leq n-1$. On évalue cette égalité polynomiale en f :

$$f^n = Q(f) \circ P(f) + R(f),$$

puis on évalue en x :

$$f^n(x) = Q(f)(P(f)(x)) + R(f)(x) = R(f)(x),$$

car $P(f)(x) = 0$.

Or, $R(f)(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$. Ceci montre que la famille $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ est aussi génératrice de E_x ; c'en est donc une base.

(b) Pour tout $i \in [\![0, r-2]\!]$, on a $f(f^i(x)) = f^{i+1}(x)$. Et, $f(f^{r-1}(x)) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k f^k(x)$, avec les notations précédentes.

La traduction matricielle de ces égalité est que, dans la base $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$, la matrice de f_{E_x} est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la matrice compagne de P (avec les notations précédentes).

(c) On vient de montrer que f_{E_x} est représenté dans la base $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ par une matrice compagne C_P, pour un certain polynôme P. On a $\chi_{C_P}(C_P) = 0$, d'après la question 11. Or, par définition, $\chi_{f_{E_x}} = \chi_{C_P}$; donc $\chi_{C_P}(C_P)$ est la représentation matricielle de $\chi_{f_{E_x}}(f_{E_x})$ (dans la même base). Donc $\chi_{f_{E_x}}(f_{E_x}) = 0$.

13. On cherche à montrer que $\chi_f(f) = 0$. Cela revient à montrer que, pour tout $x \in E$, $\chi_f(f)(x) = 0$. Soit $x \in E$.

Alors, x est dans E_x. Par la question précédente, on a donc $\chi_{f_{E_x}}(f_{E_x})(x) = 0$. Comme f et f_{E_x} coïncident sur E_x, on peut plus simplement écrire $\chi_{f_{E_x}}(f)(x) = 0$. De plus, on sait par la question 10 que $\chi_{f_{E_x}}$ divise χ_f. Notons P un polynôme tel que $\chi_f = P \times \chi_{f_{E_x}}$. En évaluant en f, puis en x, on a donc :

$$\chi_f(f)(x) = P(f)(\chi_{f_{E_x}}(f)(x)) = 0.$$

Ainsi, pour tout x dans E, $\chi_f(f)(x) = 0$.

Donc, $\chi_f(f) = 0$, ce qui conclut la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.