26 - Espaces préhilbertiens

Jeremy Daniel

On désigne par E un espace vectoriel réel.

1 Produit scalaire

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1 (Forme bilinéaire symétrique, positive, définie positive)
Une forme bilinéaire $B : E \times E \to \mathbb{R}$ est :
- symétrique si $\forall x, y \in E, B(x, y) = B(y, x)$;
- positive si $\forall x \in E, B(x, x) \geq 0$;
- définie positive si $\forall x \in E - \{0\}, B(x, x) > 0$.

Définition 1.2 (Produit scalaire)
Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition 1.3 (Espace préhilbertien réel)
Un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire est un espace préhilbertien réel.

Notation 1.4
On utilisera souvent les notations $\langle x \mid y \rangle$ ou $(x \mid y)$ ou $x \cdot y$ pour désigner le produit scalaire $B(x, y)$ (quand B est clair dans le contexte).

Exemples 1.5
- Dans $E = \mathbb{R}^n$, $B : (x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un produit scalaire.
  C'est le *produit scalaire usuel* ou *canonique* sur $\mathbb{R}^n$.
- Dans $E = \mathbb{R}[X]$, $B : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 PQ$ est un produit scalaire. La symétrie est claire et si $B(P, P) = 0$, alors $P^2 = 0$ sur $[0, 1]$, ce qui implique $P = 0$.
- On peut aussi définir un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ par $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b fg$.
  La même formule définit une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, mais elle n'est pas définie positive.

- Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : (M,N) \mapsto \mathrm{Tr}(M^T N)$ est un produit scalaire.
  Pour la symétrie, $\mathrm{Tr}(M^T N) = \mathrm{Tr}\left((M^T N)^T\right) = \mathrm{Tr}(N^T M)$. Pour le caractère défini positif, on écrit $\mathrm{Tr}(M^T M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j=1}^{n} m_{j,i}^2\big)$, de sorte que $\mathrm{Tr}(M^T M)$ est strictement positif si M n'est pas la matrice nulle.
- Considérons (Ω, P) un univers probabilisé fini. Notons E l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur (Ω, P). L'application $\mathrm{Cov} : (X,Y) \mapsto \mathrm{Cov}(X,Y)$ est une forme bilinéaire symétrique positive. Elle n'est pas définie positive car si $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$ est nul, on peut seulement dire que X est presque sûrement constante.
  La restriction de Cov a un sous-espace vectoriel de E ne contenant aucune variable aléatoire presque sûrement constante (à part la variable aléatoire nulle) est un produit scalaire.

Théorème 1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ une application bilinéaire symétrique positive sur un espace vectoriel réel E. Pour tous $x, y \in E$:

$$|\langle x \mid y\rangle| \leq \sqrt{\langle x \mid x\rangle}\sqrt{\langle y \mid y\rangle}.$$

Proposition 1.7 (Cas d'égalité)
Dans l'énoncé précédent, si $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est définie positive (donc un produit scalaire), on a l'égalité

$$|\langle x \mid y\rangle| = \sqrt{\langle x \mid x\rangle}\sqrt{\langle y \mid y\rangle}$$

ssi x et y sont colinéaires.

Exemples 1.8
- Dans $\mathbb{R}^n$: si $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont des n-uplets de réels, alors

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

- Dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$: si f et g sont des fonctions continues sur $[a,b]$, alors

$$\Big|\int_a^b fg\Big| \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}.$$

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: si M et N sont deux matrices carrées de taille n, alors

$$\big|\mathrm{Tr}(M^T N)\big| \leq \sqrt{\mathrm{Tr}(M^T M)}\sqrt{\mathrm{Tr}(N^T N)}.$$

Attention !
Pour ne pas se tromper dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (oubli des racines carrées...), vérifier systématiquement l'homogénéité de la formule.

1.2 Norme euclidienne

Définition 1.9 (Norme - HP)
Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- **Homogénéité** : pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$: $N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x)$;
- **Séparation** : pour tout $x \in E - \{0\}$, $N(x) > 0$.
- **Inégalité triangulaire** : pour tous $x, y \in E$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Exemples 1.10

- Sur $\mathbb{R}^n$: Pour tout $p \geq 1$, on définit la norme p par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

- Sur $\mathbb{R}^n$: on définit la norme infinie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = \sup\{|x_k|, k \in [\![1, n]\!]\}.$$

- On définit des analogues des normes p et de la norme infinie sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.

Proposition 1.11 (Norme associée à un produit scalaire, norme euclidienne)
Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application

$$N : E \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

est une norme sur E. Une telle norme est dite euclidienne.

Proposition 1.12
Si N est euclidienne, on a l'égalité $N(x+y) = N(x) + N(y)$ ssi x et y sont positivement liés.

Notation 1.13
Si x est un vecteur d'un espace préhilbertien réel E, on note souvent $\|x\|$ la norme du vecteur x.

Définition 1.14 (Vecteur unitaire)
Un vecteur de E est unitaire s'il est de norme 1.

Remarque 1.15
Si x est un vecteur non nul de E, il existe exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à x : $\pm \dfrac{x}{\|x\|}$.

Proposition 1.16 (Distance associée à un produit scalaire)
Soit E un espace préhilbertien réel, de norme $\|\cdot\|$. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$, définie par $d(x,y) = \|x - y\|$ vérifie :

- ***Séparation :*** *$\forall x, y \in E : d(x,y) = 0$ si, et seulement si $x = y$.*
- ***Inégalité triangulaire :*** *$\forall x, y, z \in E : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.*

Proposition 1.17 (Identités de polarisation)
Soit E un espace préhilbertien réel, dont on note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme. Pour tous x et y de E, on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Remarque 1.18
On dispose aussi de l'identité du parallélogramme : pour tous x et y de E :

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2.$$

(déjà vu dans $\mathbb{R}^2$, avec le point de vue apporté par les nombres complexes)

Proposition 1.19 (Caractérisation des normes euclidiennes - HP)
Soit N une norme sur E. La norme N est euclidienne ssi l'application

$$(x,y) \in E^2 \mapsto \frac{1}{2}\left(N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2\right)$$

est bilinéaire.

Exercice 1.20
Sur $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, on a défini la norme infinie par $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$.
Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme. Est-elle euclidienne ?

1.3 Orthogonalité

Dans la suite, E est un espace préhilbertien réel, dont on note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme.

Définition 1.21 (Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales.)
Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $\langle x \mid y \rangle = 0$.
Deux parties A et B de E sont orthogonales si pour tout couple (x,y) de $A \times B$, x est orthogonal à y.

Définition 1.22 (Orthogonal d'une partie)
Soit A une partie de E. L'orthogonal de A, noté $A^\perp$, est l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \langle x \mid y \rangle = 0\}.$$

Proposition 1.23
Soient A et B deux parties de E. On a les propriétés suivantes :
a) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ;
b) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$;
c) $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$;
d) $A \subset (A^\perp)^\perp$;
e) $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$;
f) $A \cap A^\perp \subset \{0\}$.

Attention !
Même dans le cas où A est sous-espace vectoriel de E, l'inclusion $A \subset (A^\perp)^\perp$ n'est pas une égalité en général. On peut par exemple considérer $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$. On note A l'ensemble des applications polynomiales sur $[0,1]$. Alors $A^\perp = \{0\}$ (corollaire du théorème de Weierstrass) et donc $(A^\perp)^\perp = E$.

Définition 1.24 (Famille orthogonale, famille orthonormale)
Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est orthogonale si les e_i sont deux à deux orthogonaux. Elle est orthonormale (ou orthonormée) si, de plus, chaque e_i est de norme 1.

Remarque 1.25
Pour une famille orthonormale $(e_i)_{i \in I}$, on a donc $\langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Théorème 1.26 (Pythagore)
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthogonale. Alors $\|e_1 + \cdots + e_n\|^2 = \|e_1\|^2 + \cdots + \|e_n\|^2$.

Proposition 1.27
Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est une famille libre.

Théorème 1.28 (Processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Il existe une famille orthonormale $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$.

Remarque 1.29
En particulier, les deux familles engendrent le même sous-espace vectoriel.

Exercice 1.30
Montrer qu'on a existence et unicité d'une telle famille orthonormale $(f_1, \ldots, f_n)$ si on demande de plus que $\langle e_k \mid f_k \rangle > 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2 Espace euclidien

2.1 Bases orthonormales

DÉFINITION 2.1 (Espace euclidien)
Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

PROPOSITION 2.2
Toute famille orthonormale d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormale.

COROLLAIRE 2.3
Dans un espace euclidien E, il existe des bases orthonormales.

PROPOSITION 2.4 (Calculs dans une base orthonormale)
Soit $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E. Si $x, y \in E$, on note $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Alors

- $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \langle x \mid e_k \rangle$;
- $\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$;
- $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

REMARQUE 2.5
Matriciellement, si $X = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(y)$, on peut réécrire les deux dernières égalités comme $\langle x \mid y \rangle = X^T Y$ et $\|x\|^2 = X^T X$.

2.2 Projection orthogonale

PROPOSITION 2.6
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien E.
Alors $F \oplus F^\perp = E$.

DÉFINITION 2.7 (Projeté orthogonal)
Soit $x \in E$. On garde les notations de la preuve précédente et on écrit

$$x = p_F(x) + (x - p_F(x)),$$

avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. Le vecteur $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.

REMARQUE 2.8
L'endomorphisme de E, $x \mapsto p_F(x)$ est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 2.9
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F, on a

$$p_F(x) = \langle x \mid e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x \mid e_n \rangle e_n.$$

Définition 2.10 (Distance à un sous-espace)
Si F est un sous-espace de dimension finie de E, on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$ la distance de x à F.

Proposition 2.11 (Caractérisation du projeté orthogonal)
Pour tout x de E, $p_F(x)$ est l'unique point y_0 de F tel que $d(x, y_0) = d(x, F)$.

Exemples 2.12

- On considère D la droite engendrée par un vecteur $u \neq 0$. Alors $\dfrac{u}{\|u\|}$ est un vecteur unitaire et $p_D(x) = \dfrac{\langle x \mid u \rangle}{\|u\|^2} u$. Donc, $d(x, D) = \|x - p_D(x)\| = \|x - \dfrac{\langle x \mid u \rangle}{\|u\|^2} u\|$.
- On suppose que E est euclidien de dimension n et on considère H un hyperplan de E. On note $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base orthonormale de H et on la complète en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.
  Alors $x - p_H(x)$ est la projection orthogonale de x sur $\mathrm{Vect}(e_n)$. Donc,

$$d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = |\langle x, e_n \rangle|.$$

Exercice 2.13
Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2 dt.$

3 Compléments - Orientation, produit mixte, produit vectoriel

3.1 Orientations

Définition 3.1
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des bases de E par $\mathbf{e} \mathcal{R} \mathbf{e'} \iff \det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e'}) > 0$.

Proposition 3.2
La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E. Il y a exactement deux classes d'équivalence : si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, toute base de E est $\mathcal{R}$-équivalente à $(e_1, \ldots, e_n)$ ou à $(e_1, \ldots, -e_n)$.

Définition 3.3 (Orientation d'un espace vectoriel réel)
On appelle orientation de E le choix d'une de ces deux classes d'équivalence. Une base de E est directe si elle est dans la classe d'équivalence choisie, indirecte sinon.

Remarque 3.4
En résumé, se donner une orientation d'un espace vectoriel revient à choisir une base particulière **e** et décréter qu'une autre base **e'** est directe si, et seulement si $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e'}) > 0$.

Exemple 3.5
En général, on choisit comme orientation de $\mathbb{R}^n$ celle donnée par la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$.

Proposition 3.6
Soit H un hyperplan d'un espace euclidien orienté E. Soit a un vecteur non nul de la droite $D = H^{\perp}$. Parmi les deux orientations possibles de H, une seule vérifie la propriété suivante :
Une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H est directe ssi la base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, a)$ de E est directe.

Remarque 3.7
En résumé, si une orientation de E est fixée, si H est un hyperplan de E et si a est un vecteur normal à H, on peut choisir de façon naturelle une orientation de H.

3.2 Produit mixte et produit vectoriel

Proposition 3.8
*Soient **e** et **e'** deux bases orthonormales directes d'un espace euclidien orienté E. Alors $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e'}) = 1$.*

Définition 3.9 (Produit mixte)
Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs dans un espace euclidien orienté E de dimension n. Si **e** est une base orthonormale directe de E, on définit le produit mixte de $(u_1, \ldots, u_n)$, noté $[u_1, \ldots, u_n]$ comme

$$[u_1, \ldots, u_n] = \det_{\mathbf{e}}(u_1, \ldots, u_n).$$

Remarque 3.10
Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structuelle usuelle d'espace euclidien orienté, le produit mixte $(u_1, \ldots, u_n)$ se comprend comme le volume orienté du parallélipède engendré par les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ (dans cet ordre).

Proposition 3.11
Si f est un endomorphisme d'un espace euclidien orienté E de dimension finie n,

$$[f(u_1), \ldots, f(u_n)] = \det(f)[u_1, \ldots, u_n].$$

Remarque 3.12
Cette notion de produit mixte permet de définir la notion voisine de produit vectoriel.

Proposition 3.13
Soit E un espace euclidien. L'application $\psi : E \to E^*$, définie par

$$\psi(x) = \big(l_x : y \mapsto \langle x \mid y \rangle\big).$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire 3.14
Soient $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ une famille de $n-1$ vecteurs dans un espace euclidien orienté E de dimension n. Il existe un unique vecteur x tel que, pour tout vecteur u_n de E, on ait l'égalité

$$[u_1, \ldots, u_n] = \langle x \mid u_n \rangle.$$

Définition 3.15 (Produit vectoriel)
Le vecteur x ainsi défini est le produit mixte de $(u_1, \ldots, u_{n-1})$. On le note $u_1 \wedge \cdots \wedge u_{n-1}$.

Remarque 3.16
En dimension 3, si u et v ont pour coordonnées (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans une base orthonormée directe, on a

$$u \wedge v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

dans cette même base.

4 Compléments - Isométries vectorielles

Dans la suite, E est un espace euclidien, de produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et de norme $\| \cdot \|$.

4.1 Isométries

Proposition 4.1
Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- *i)* $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$;
- *ii)* $\forall x, y \in E$, $\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$;
- *iii) Toute base orthonormale de E est envoyée sur une base orthonormale de E ;*
- *iv) Il existe une base orthonormale de E dont l'image par u est une base orthonormale de E.*

Définition 4.2 (Isométrie vectorielle)
On appelle isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) un endomorphisme respectant ces propriétés.

Exemple 4.3
Une symétrie s de E est une isométrie vectorielle ssi ses sous-espaces caractéristiques $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux.
On parle alors de symétrie orthogonale.

Proposition 4.4 (Les isométries forment un groupe)
L'ensemble des isométries d'un espace vectoriel est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

Notation 4.5
On note $\mathrm{O}(E)$ ce sous-groupe et on l'appelle groupe orthogonal de E.

4.2 Groupe orthogonal - version matricielle

Définition 4.6 (Matrice orthogonale)
Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $M^T M = I_n$.

Proposition 4.7
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- *i) M est une matrice orthogonale ;*
- *ii) M^T est une matrice orthogonale ;*
- *iii) les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$;*
- *iv) les lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 4.8
L'ensemble des matrices orthogonales forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Notation 4.9
C'est le *groupe orthogonal* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4.10
Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à ± 1.

Théorème 4.11
Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- *i) u est une isométrie vectorielle ;*
- *ii) Pour toute base orthonormale $\boldsymbol{e}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(u)$ est une matrice orthogonale ;*
- *iii) Il existe une base orthonormale $\boldsymbol{e}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(u)$ est une matrice orthogonale.*

Proposition 4.12
Soit E un espace euclidien, $\boldsymbol{e}$ une base orthonormale de E et $\boldsymbol{e'}$ une base quelconque de E. La matrice de passage $P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{e'}}$ est orthogonale si, et seulement si $\boldsymbol{e'}$ est une base orthonormale.

Corollaire 4.13
Si $\boldsymbol{e}$ *et* $\boldsymbol{e'}$ *sont deux bases orthonormales de* E*, on a* $\det_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{e'}) = \pm 1$*. Si, de plus,* E *est orienté et si* $\boldsymbol{e}$ *et* $\boldsymbol{e'}$ *sont deux bases orthonormales directes, alors* $\det_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{e'}) = 1$*.*

Définition 4.14
L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$: c'est le *groupe spécial orthogonal*, noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
De même, si E est un espace euclidien, l'ensemble des isométries vectorielles de E de déterminant 1 est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$: on le note $\mathrm{SO}(E)$.

Exemple 4.15
Si s est une symétrie orthogonale par rapport à F et parallèlement à $F^{\perp}$, le déterminant de s est $(-1)^{\dim G}$. Ainsi, $s \in \mathrm{SO}(E)$ ssi $\dim G$ est paire.
Les réflexions de E sont les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan. Elles ne sont pas dans $\mathrm{SO}(E)$.

Proposition 4.16
Soit E *un espace euclidien de dimension* n *et soit* $\boldsymbol{e}$ *une base orthonormale de* E*.*
L'isomorphisme de groupes $\phi : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, défini par* $\phi(u) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(u)$*, induit un isomorphisme de groupes de* $\mathrm{O}(E)$ *vers* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *et de* $\mathrm{SO}(E)$ *vers* $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$*.*

4.3 En dimension 2

Théorème 4.17
Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *sont les matrices de la forme*

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ \textit{(déterminant 1)}$$

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \ \textit{(déterminant } -1\textit{)},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$*.*

Définition 4.18 (Rotation d'angle θ)
On appelle $R(\theta)$ la rotation (vectorielle) d'angle θ. L'angle est bien défini modulo 2π.

Proposition 4.19
Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$*,* $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$*.*
Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *est donc commutatif ; il est isomorphe au groupe* $\mathbb{U}$ *des nombres complexes de module 1.*

Proposition 4.20
Pour tout θ *non nul modulo* 2π*,* $S(\theta)$ *est une réflexion : c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur* $\cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$*.*