25 - Algèbre linéaire, déterminants

Jeremy Daniel

1 Groupe symétrique

1.1 Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Définition 1.1 (Groupe symétrique)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$.

Notation 1.2 (Écriture d'une permutation)
Pour écrire une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on utilise une notation matricielle. Sur la première ligne, on énumère les entiers de 1 à n ; sur la deuxième ligne, on écrit leur image par σ.

Exemple 1.3
Pour $n = 4$, la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est la permutation telle que $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 1$.

Définition 1.4 (Orbite d'un point)
Soit $\sigma \in S_n$, soit $k \in [\![1, n]\!]$. L'orbite de k sous σ est l'ensemble $\left\{\sigma^\ell(k), \ell \in \mathbb{N}\right\}$.

Exemples 1.5
- Pour la permutation σ définie plus haut, l'orbite de 1 est l'ensemble $\{1, 4, 3\}$. L'orbite de 2 est l'ensemble $\{2\}$.
- Si σ est l'identité de $[\![1, n]\!]$, l'orbite de k sous σ est réduite au singleton $\{k\}$.

Proposition 1.6 (Les orbites forment une partition de $[\![1, n]\!]$)
Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. L'ensemble des orbites sous σ définit une partition de $[\![1, n]\!]$.

Définition 1.7 (Cycle, support)
Soit $p \geq 2$ un entier. Un p-cycle de $\mathcal{S}_n$ est une permutation σ de $\mathcal{S}_n$ pour laquelle il existe p éléments $a_1, \ldots, a_p$ dans $[\![1, n]\!]$, deux à deux distincts, tels que
- $\forall x \notin \{a_1, \ldots, a_p\} : \sigma(x) = x$
- $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$, …, $\sigma(a_{p-1}) = a_p$ et $\sigma(a_p) = a_1$.

Le support du p-cycle est l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_p\}$, c'est-à-dire l'ensemble des x dans $[\![1, n]\!]$ tels que $\sigma(x) \neq x$.

DÉFINITION 1.8 (Transposition)
On appelle transposition un 2-cycle.

NOTATION 1.9 (Écriture des cycles)
Avec les notations de la définition ci-dessus, le cycle se note $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p \end{pmatrix}$.

EXEMPLE 1.10
On reprend l'exemple de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. C'est un 3-cycle, qui s'écrit simplement $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. On notera que l'écriture allégée d'un p-cycle n'est pas unique. Ici,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 1.11 (Caractérisation des cycles)
Une permutation σ de S_n est un p-cycle ssi la partition en orbites sous σ comprend un unique ensemble à p éléments et $n - p$ ensembles à 1 élément.

ATTENTION !
Une permutation n'est pas caractérisée par sa partition en orbites. Pour $n = 4$, les 3-cycles $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ont toutes les deux comme orbites $\{1, 2, 3\}$ et $\{4\}$.

THÉORÈME 1.12 (Décomposition en produit de cycles à supports disjoints)
Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Il existe un entier $k \geq 0$, des entiers $p_1, \ldots, p_k \geq 2$, des permutations $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ telles que :
- *Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, σ_i est un p_i-cycle.*
- *Les supports des σ_i sont deux à deux disjoints.*
- *$\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$.*

Une telle décomposition de σ est unique à l'ordre près*, au sens où l'ensemble $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ est entièrement déterminé par σ et par les conditions ci-dessus.*

REMARQUE 1.13
Comme les supports des cycles σ_i sont disjoints, ces cycles commutent deux à deux.

MÉTHODE 1.14 (Écriture en produit de cycles)
Pour écrire une permutation sous cette forme, on suit l'algorithme suivant :
- On commence par l'élément 1 et on écrit les éléments $\sigma^k(1)$ dans l'ordre d'apparition ($k \geq 1$) jusqu'à boucler sur 1 (si 1 est envoyé sur lui-même, il n'apparait pas dans la décomposition).
- On a alors traité l'orbite de 1. On prend le premier entier qui n'est pas dans l'orbite de 1 et on recommence.

– On procède ainsi jusqu'à avoir épuisé tous les éléments de $[\![1, n]\!]$.

Par exemple, pour $n = 8$, on considère $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 1 & 3 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. On calcule

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.15
Le *produit* des permutations étant en réalité une composition, le calcul d'un produit de cycles se fait de droite à gauche.

Exercice 1.16
Écrire comme produit de cycles à supports disjoints la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.17 (Les transpositions engendrent $\mathcal{S}_n$)
Toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$ s'écrit comme un produit de transpositions.

Remarque 1.18
Il n'y a pas unicité. Par exemple, le 3-cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est égal à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, mais aussi à $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2 Inversions et signature

Définition 1.19 (Inversion d'une permutation)
Soit σ un élément de $\mathcal{S}_n$. Une *inversion* de σ est un couple (k, ℓ) d'entiers de $[\![1, n]\!]$, tels que $k < \ell$ et $\sigma(k) > \sigma(\ell)$.

Notation 1.20 (Nombre d'inversions)
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ.

Définition 1.21 (Signature d'une permutation)
La signature de σ – notée $\varepsilon(\sigma)$ – est le nombre $(-1)^{I(\sigma)}$.

Exercice 1.22
Montrer que la signature d'une transposition est égale à -1.

Théorème 1.23 (La signature est un morphisme de groupes)
Le morphisme de signature $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes :

$$\forall \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n, \varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

Proposition 1.24 (Signature d'un p-cycle)
La signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$.

Corollaire 1.25 (Signature d'une permutation écrite en produit de cycles)
On suppose que, dans la décomposition en produits de cycles à supports disjoints de σ, il y a k cycles de longueur $p_1, \dots, p_k$. La signature de σ est $(-1)^{\sum_{i=1}^{k} p_i - k}$.

2 Déterminant d'une famille de vecteurs

2.1 Aire d'un parallélogramme dans le plan

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, on considère les parallélogrammes construits sur deux vecteurs u et v. On souhaite définir une notation d'aire orientée pour ces parallélogrammes. Si on note $\mathcal{A}(u,v)$ l'aire orientée du parallélogramme construit sur u et v, on veut que $\mathcal{A}(u,v)$ vérifie les axiomes suivants, pour tous vecteurs u_1, u_2, v_1, v_2 et scalaires λ et μ :
- $\mathcal{A}(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda \mathcal{A}(u, v_1) + \mu \mathcal{A}(u, v_2)$
- $\mathcal{A}(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda \mathcal{A}(u_1, v) + \mu \mathcal{A}(u_2, v)$
- $\mathcal{A}(u,v) = -\mathcal{A}(v,u)$
- $\mathcal{A}(e_1, e_2) = 1$

Remarque 2.1
Les deux premières propriétés sont des conditions de linéarité par rapport à la première/à la deuxième variable. La troisième propriété vient de ce qu'on considère des aires orientées. La quatrième propriété est une condition de normalisation.

Proposition 2.2 (Unicité de la notion d'aire orientée)
Il existe une unique application $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifie ces 4 axiomes. Si (a,b) et (c,d) sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on a $\mathcal{A}\big((a,b),(c,d)\big) = ad - bc$.

2.2 Forme multilinéaire

On désigne par $\mathbb{K}$ un corps et par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2.3 (Forme k-linéaire)
Soit $k \geq 1$ un entier, soit $f : E^k \to \mathbb{K}$ une application. On dit que f est une forme k-linéaire sur E si pour tout $i \in [\![1,k]\!], \forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \in E$, l'application $f_i : E \to \mathbb{K}$, définie par

$$f_i : x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

est une forme linéaire sur E.

Exemple 2.4
Une forme 2-linéaire – ou bilinéaire – est une application $b : E^2 \to \mathbb{K}$ telle que pour tous

$x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$b(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda b(x, y_1) + \mu b(x, y_2)$$
$$b(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda b(x_1, y) + \mu b(x_2, y).$$

Attention !
Une forme k-linéaire sur E est définie sur E^k, et non sur E. En tant qu'application de E^k dans $\mathbb{K}$, elle n'est pas linéaire (sauf si elle est nulle ou si $k = 1$). En effet, si f est une forme k-linéaire sur E, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si $x_1, \ldots, x_k \in E$, la multilinéarité de f implique que

$$f\big(\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_k)\big) = f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_k) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_k)$$

alors qu'une forme linéaire sur E^k vérifie

$$f\big(\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_k)\big) = \lambda f(x_1, \ldots, x_k).$$

Proposition 2.5 (Ensemble des formes k-linéaires)
L'ensemble des formes k-linéaires sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E^k, \mathbb{K})$. Si E est de dimension finie, l'ensemble des formes k-linéaires sur E est de dimension finie égale à $(\dim E)^k$.

Exemples 2.6
- Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Dans $E = \mathbb{R}^3$, supposons connues les notions de produit vectoriel, noté $\wedge$, et de produit scalaire, noté $< \cdot \mid \cdot >$. Alors l'application $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

  $$d(u, v, w) = < u \wedge v \mid w >$$

  est une forme 3-linéaire sur $\mathbb{R}^3$. On appelle $d(u, v, w)$ le produit mixte des vecteurs u, v et w. En coordonnées dans une base orthonormée directe,

  $$d(u, v, w) = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1).$$

2.3 Forme multilinéaire alternée

Définition 2.7 (Forme k-linéaire alternée)
Soit $k \geq 1$ un entier et soit f une forme k-linéaire sur E. On dit que f est alternée si pour tous $x_1, \ldots, x_k \in E$, pour tous indices $i \neq j \in [\![1, n]\!]$:

$$x_i = x_j \implies f(x_1, \ldots, x_k) = 0.$$

Remarque 2.8
Si $k = 1$, la condition est vide, de sorte que toute forme linéaire est alternée.

Exemple 2.9
Le produit mixte est une forme 3-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^3$. Géométriquement, cela vient de $u \wedge u = 0$ et du fait que $u \wedge v$ est orthogonal à u et v.

Définition 2.10 (Forme k-linéaire antisymétrique)
Soit f une forme k-linéaire sur E. On dit que f est antisymétrique si pour tous $x_1, \ldots, x_k \in E$, pour tous indices $i \neq j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k) \\ = &-f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

Proposition 2.11 (Formes alternée et antisymétriques)
On suppose $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$. *Une forme k-linéaire sur E est alternée ssi elle est antisymétrique.*

Proposition 2.12 (Ensemble des formes k-linéaires alternées)
L'ensemble des formes k-linéaires alternées sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace des formes k-linéaires sur E.

Remarque 2.13
Si $\dim E = n$, on peut montrer que cet espace est de dimension $\binom{n}{k}$.

Théorème 2.14 (Espace des formes n-linéaires alternées)
On suppose que $\dim E = n$. *Alors l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension* 1. *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, une forme n-linéaire alternée ϕ sur E est entièrement déterminée par $\phi(e_1, \ldots, e_n)$.*

Lemme 2.15
Soit ϕ une forme k-linéaire alternée sur un espace vectoriel E. Si σ est une permutation de $[\![1, k]\!]$ et si $x_1, \ldots, x_k$ sont des vecteurs de E, on a

$$\phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\phi(x_1, \ldots, x_k).$$

Remarque 2.16
Considérons ϕ une forme n-linéaire alternée sur E de dimension n, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on écrit $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$. On a alors

$$\phi(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n} \phi(e_1, \ldots, e_n).$$

2.4 Déterminant d'une famille de vecteurs

Dans la suite, $\dim E = n$.

PROPOSITION 2.17 (Forme déterminant par rapport à une base)
Soit $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E. *Il existe une unique forme* n*-linéaire alternée, notée* $\det_{\boldsymbol{e}}$ *telle que* $\det_{\boldsymbol{e}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

DÉFINITION 2.18 (Déterminant d'une famille de vecteurs par rapport à une base)
Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de n vecteurs dans E et si $\mathbf{e}$ est une base de E, le scalaire $\det_{\mathbf{e}}(u_1, \ldots, u_n)$ est le déterminant de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathbf{e}$.

REMARQUE 2.19
Avec les notations précédentes, $\det_{\mathbf{e}}(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}$.

EXEMPLES 2.20
- **Cas** $n = 2$. Si $u_1 = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2$ et $u_2 = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2$, on a

$$\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

- **Cas** $n = 3$. On considère trois vecteurs u, v et w dans $\mathbb{R}^3$, dont les coordonnées dans la base $\mathbf{e}$ choisies sont (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) et (w_1, w_2, w_3). On calcule

$$\det_{\mathbf{e}}(u, v, w) = u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 + u_2v_3w_1 - u_2v_1w_3 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1.$$

  Ainsi, le produit mixte $[u, v, w] =< u \wedge v \mid w >$ est le déterminant de la famille (u, v, w) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

PROPOSITION 2.21 (Changement de base)
Soient $\boldsymbol{e}$ *et* $\boldsymbol{e}'$ *deux bases de* E. *Soit* $(u_1, \ldots, u_n)$ *une famille de vecteurs. Alors*

$$\det_{\boldsymbol{e}'}(u_1, \ldots, u_n) = \det_{\boldsymbol{e}'}(\boldsymbol{e})\det_{\boldsymbol{e}}(u_1, \ldots, u_n).$$

COROLLAIRE 2.22 (Caractérisation des bases par le déterminant)
Soit $\mathbf{e}$ *une base de* E. *La famille* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est une base de* E *ssi* $\det_{\mathbf{e}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$.

3 Déterminants d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

3.1 Déterminant d'un endomorphisme

PROPOSITION 3.1 (Déterminant d'un endormorphisme)
Soit f *un endomorphisme de* E. *Il existe un unique scalaire – noté* $\det(f)$ *tel que, pour toute base* $\boldsymbol{e}$ *de* E *et tous vecteurs* $u_1, \ldots, u_n$:

$$\det_{\boldsymbol{e}}\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big) = \det(f)\det_{\boldsymbol{e}}(u_1, \ldots, u_n).$$

Définition 3.2 (Déterminant d'un endomorphisme)
Ce scalaire $\det(f)$ est le déterminant de l'endomorphisme f.

Remarque 3.3
Pour toute base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on a donc $\det(f) = \det_{\mathbf{e}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$.

Proposition 3.4 (Caractérisation des automorphismes par le déterminant)
Un endomorphisme f de E est un automorphisme ssi son déterminant est non nul.

Proposition 3.5 (Propriétés du déterminant)
Soient f et g deux endomorphismes de E. Soit λ un scalaire. Alors,
- $\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f)$ *;*
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ *;*
- *Si f est un automorphisme de E,* $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

Exercice 3.6
Soit $E = F \oplus G$ une décomposition en sous-espaces supplémentaires. On note s la symétrie sur F parallèlement à G. Calculer $\det(s)$.

Exercice 3.7
Soit f un endomorphisme de E admettant une base de vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_n)$, de valeurs propres associées $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Déterminer $\det(f)$.

3.2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 3.8 (Déterminant d'une matrice carrée)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Notation 3.9
Si $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$, on note le déterminant :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exemples 3.10
- $\mathbf{n = 2}$: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$;

- $\mathbf{n = 3}$:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$$

$$- a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.$$

Méthode 3.11 (Méthode de Sarrus)
On obtient de la façon suivante la formule pour le déterminant d'une matrice 3×3 :
- On fait les produits des 3 facteurs sur chaque diagonale descendante de la matrice, en prolongeant virtuellement la matrice sur les côtés.
- On procède de même avec les diagonales montantes.
- On fait la somme des 6 termes obtenus, avec un coefficient + pour les diagonales descendantes et un coefficient − pour les diagonales montantes.

Attention !
La méthode de Sarrus n'a pas d'équivalents en dimension supérieure. Le calcul du déterminant est une somme de $n!$ quantités, alors qu'il n'y a que $2n$ diagonales.

Théorème 3.12 (Formule pour le déterminant)
Si $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on a* $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$.

Remarque 3.13
Cette formule est inexploitable en pratique, en raison des $n!$ termes. Elle a cependant des conséquences théoriques importantes.

Proposition 3.14 (Caractérisation des matrices inversibles par le déterminant)
Une matrice carrée A est inversible ssi son déterminant est non nul.

Exercice 3.15
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\chi_A : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, définie par

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$$

est une application polynomiale de degré n. Déterminer les racines de χ_A.

Proposition 3.16 (Compatibilité des déterminants)
Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\boldsymbol{e}$ une base de E, f un endomorphisme de E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(f)$. Alors $\det(A) = \det(f)$.

Corollaire 3.17 (Le déterminant est un invariant de similitude)
Deux matrices semblables ont même déterminant.

Proposition 3.18 (Propriétés du déterminant des matrices)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ *;*
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ *;*
- *Si* A *est inversible,* $\det(A^{-1}) = \big(\det(A)\big)^{-1}$.

Proposition 3.19 (Déterminant d'une matrice triangulaire)
Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice triangulaire. Alors,* $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3.3 Propriétés par rapport aux colonnes et aux lignes

Remarque 3.20
Par définition, le déterminant, vue comme application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une forme n-linéaire alternée sur les colonnes des matrices.

Corollaire 3.21 (Déterminant après opération élémentaire sur les colonnes)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On note* $\widetilde{A}$ *la matrice obtenue à partir de* A *par une opération élémentaire sur les colonnes. Si* $\widetilde{A}$ *est obtenu :*
- *en échangeant deux colonnes,* $\det(\widetilde{A}) = -\det(A)$ *;*
- *en ajoutant à une colonne un multiple d'une autre colonne,* $\det(\widetilde{A}) = \det(A)$ *;*
- *en multipliant une colonne par* $\lambda \neq 0$*,* $\det(\widetilde{A}) = \lambda\det(A)$.

Théorème 3.22 (Déterminant de la transposée)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On a* $\det(A) = \det(A^T)$.

Corollaire 3.23 (Le déterminant comme forme n-linéaire alternée sur les lignes)
Le déterminant, vue comme application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *de* $\mathbb{K}$ *est une forme* n*-linéaire alternée sur les lignes d'une matrice.*

Corollaire 3.24 (Déterminant après opérations élémentaires sur les lignes)
Le résultat énoncé sur les opérations élémentaires sur les colonnes s'adapte mutatis mutandis *aux opérations élémentaires sur les lignes.*

4 Aspects calculatoires

4.1 Matrice triangulaire par blocs

Proposition 4.1 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, s'écrivant par blocs* $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$*, avec* $A \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$*,* $C \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$ *et* $D \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{K})$*. Alors* $\det(M) = \det(A) \times \det(D)$.

Attention !
Dans une écriture par blocs du type

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix},$$

on n'a pas en général $\det(M) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Corollaire 4.2 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs – cas général)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant une écriture par blocs du type

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,k} \\ 0 & M_{2,2} & \dots & M_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{k,k} \end{pmatrix},$$

où les $M_{i,i}$ sont des blocs carrés. Alors $\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_{i,i})$.

4.2 Développement selon une ligne ou une colonne

Définition 4.3 (Mineurs de A)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le mineur de A, en position (i,j), est le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Proposition 4.4 (Développement selon une colonne)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.

Proposition 4.5 (Développement selon une ligne)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.

Exemple 4.6
On peut utiliser ces propositions pour calculer rapidement des déterminants de matrices ayant beaucoup de 0. Considérons ainsi

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant selon la première ligne,

$$D = -2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{vmatrix}.$$

A ce stade, on peut utiliser la méthode de Sarrus, ou bien développer selon la deuxième colonne le déterminant de gauche et selon la première ligne celui de droite. On trouve :

$$D = -2\Big(-1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\Big) + 3\Big(1\begin{vmatrix}5 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}\Big).$$

Et donc

$$D = -2(-2) + 3(-12 + (-6)) = -50.$$

Définition 4.7 (Cofacteurs)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le cofacteur de A, en position (i,j), est le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$, où $\Delta_{i,j}$ est le mineur de A en position (i,j).

Définition 4.8 (Comatrice)
La comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $\mathrm{Com}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient en position (i,j) est le cofacteur de A en position (i,j).

Théorème 4.9 (Formule de Cramer)
On a l'identité $A\,\mathrm{Com}(A)^T = (\det A)I_n$.

Corollaire 4.10 (Formule de Cramer – cas d'une matrice inversible)
Si A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\big(\mathrm{Com}(A)\big)^T$.

Exercice 4.11
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n dont les coefficients sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, alors $\det(M) \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(M) = \pm 1$.

4.3 Déterminant de Vandermonde

Proposition 4.12
Soient $x_0, \ldots, x_n$ des scalaires. On note $V(x_0, \ldots, x_n)$ le déterminant

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Alors, $V(x_0, \ldots, x_n) = \displaystyle\prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$.

Corollaire 4.13
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$ *est inversible ssi les x_i sont deux à deux distincts.*

Proposition 4.14 (Interpolation de Lagrange – par déterminant de Vandermonde)
Soient $x_0, \ldots, x_n$ deux à deux distincts dans $\mathbb{K}$ et soient $y_0, \ldots, y_n$ quelconques dans $\mathbb{K}$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$: $P(x_i) = y_i$.

Proposition 4.15 (Base formée par les $(X + x_i)^n$ – HP)
Soient $x_0, \ldots, x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Alors la famille de polynômes $(P_0, \ldots, P_n)$ définie par $P_i = (X + x_i)^n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.