Espaces préhilbertiens

1 Calculs dans les espaces préhilbertiens

Exercice 1. ◐○○ – *Somme, intersection, orthogonaux*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} \text{ et } (F\cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}.$$

Exercice 2. ◐○○ – *Processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt*

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel.
Orthogonaliser la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3), où $u_1 = (1,1,0)$; $u_2 = (1,0,1)$; $u_3 = (1,1,1)$.

Exercice 3. ♣ – ●○○ – *Projecteur orthogonal dans* $\mathbb{R}^4$

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel.

1. Écrire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le sous-espace $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z-t = x-z-2t = 0\right\}$.

2. Donner la distance à F du vecteur $(1,2,3,4)$.

Exercice 4. ●○○ – *Un calcul sur les produits scalaires*

Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs unitaires dans un espace préhilbertien E.
On suppose que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Déterminer la valeur de $\sum_{1\leq i<j\leq n} \langle x_i \mid x_j\rangle$.

Exercice 5. ♣ – ●○○ – *Une inégalité dans* $\mathbb{R}^n$

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer l'inégalité $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Cas d'égalité ?

2 Exemples d'espaces préhilbertiens

Exercice 6. ◐○○ – *Un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on définit $\phi(P,Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})Q(e^{-i\theta})d\theta$.

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est une base orthonormale.

Exercice 7. ●○○ – *Exemples de produits scalaires*

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'espace E est un espace préhilbertien.

1. $E = \mathbb{R}[X]$, $(P,Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$.
2. $E = \mathscr{C}^1\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$, $(f,g) \mapsto \langle f \mid g \rangle = f(0)\,g(0) + \int_{-1}^1 f'(t)\,g'(t)\,dt$;
3. $E = \mathbb{R}[X]$, $(P,Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)\,Q^{(k)}(0)$;
4. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(P,Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)\,Q^{(k)}(a_k)$, pour $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ quelconques.

Exercice 8. ♣ – ●○○ – *Norme triple sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

On identifie l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C(n)$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,
$$\|AX\| \le C(n) \max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|\|X\|.$$
2. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $|||A||| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$. Montrer que ceci définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la norme d'une matrice orthogonale.

Exercice 9. ♣ – ●◐○ – *Inégalités intégrales*

Soit $E = \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 \le \int_0^1 f(t)^2 dt$. Cas d'égalité ?
2. Montrer qu'il n'existe pas de réel A tel que pour tout $f \in E$, $\int_0^1 f^2(t)dt \le A\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2$.
3. Montrer que $\int_0^1 \int_0^1 \big(f(u) - f(v)\big)^2\,du\,dv = 2\int_0^1 f(t)^2 dt - 2\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2$.
4. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2 dt \le \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt$.

Exercice 10. ●◐○ – *Produit scalaire sur les matrices*

On note $\|M\|$ la norme de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associée au produit scalaire $(M,N) \mapsto \mathrm{Tr}(M^T N)$.

1. Montrer que $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$, pour $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'orthogonal des matrices scalaires ; des matrices symétriques.
3. Soient A,B deux matrices symétriques. Montrer que $\sqrt{\mathrm{Tr}(A+B)^2} \le \sqrt{\mathrm{Tr}(A^2)} + \sqrt{\mathrm{Tr}(B^2)}$.

Exercice 11. ♣ – ●◐○ – *Polynômes de Legendre*

On considère sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire donné par $\langle P \mid Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $L_n = \left(X^n(1-X)^n\right)^{(n)}$.

1. Montrer que L_n est de degré n et calculer son coefficient dominant.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 0$, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\langle P' \mid Q\rangle = -\langle P \mid Q'\rangle$.
3. Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
4. Déterminer $\|L_n\|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. ●◐○ – *Produit scalaire sur les polynômes*

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P \mid Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.

1. A quelle condition sur les a_i ceci définit-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?

On suppose cette condition vérifiée.

2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance de X^n à $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{i=0}^{n} P(a_i) = 0\right\}$.

Exercice 13. ●◐○ – *L'espace $\ell^2(\mathbb{R})$*

On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum a_n^2$ converge.

1. Montrer que si (a_n) et (b_n) sont dans $\ell^2(\mathbb{R})$, alors $\sum a_n b_n$ converge.
2. Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. On définit $\langle \cdot \mid \cdot\rangle$ par : pour toutes $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites de $\ell^2(\mathbb{R})$, $\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b}\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.
   Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire.
4. La famille des $(\mathbf{e_k})_{k\in\mathbb{N}}$ où $\mathbf{e_k}$ est la suite $(\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle orthonormée ?
   Est-ce une base orthonormée de $\ell^2(\mathbb{R})$?

Exercice 14. ●◐○ – *Contre-exemples en dimension infinie*

Soit $E = \mathscr{C}\left([-1,1],\mathbb{R}\right)$, muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

1. Soit $H = \left\{f \in E,\ f(0) = 0\right\}$. Montrer que $H^\perp = \left\{0\right\}$ et conclure que $(H^\perp)^\perp \neq H$.
2. Soient $A = \left\{f \in E,\ \forall t \in [-1,0],\ f(t) = 0\right\}$ et $B = \left\{f \in E,\ \forall t \in [0,1],\ f(t) = 0\right\}$.
   Démontrer que $A^\perp = B$, que $B^\perp = A$, mais que $(A \cap B)^\perp \neq A^\perp + B^\perp$.

Exercice 15. ●◐○ – *Un produit scalaire sur les fonctions continues*

Soit $E = \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et $(a_n)_n$ une suite à valeurs dans $[0,1]$.Pour $f, g \in E$, on pose $\langle f|g\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(a_k)g(a_k)$. Justifier la définition et montrer que ceci définit un produit scalaire ssi $(a_n)_n$ est dense dans $[0,1]$.

Exercice 16. ♣ – ●●○ – *Inégalité de Hilbert*

1. Montrer $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_{-1}^{1} P^2 = -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})^2\, e^{i\theta}\, d\theta$.
2. En déduire que, pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{0\le k,\ell\le n} \frac{a_k\, a_\ell}{k+\ell+1} \le \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$.

3 Distance à un sous-espace

Exercice 17. ●○○ – *Un calcul de distance*

Déterminer $\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2\, dt$.

Exercice 18. ♣ – ●◐○ – *Un calcul de distance sur les matrices*

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ à l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exercice 19. ♣ – ●●○ – *Polynômes de Tchebychev*

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit $\langle P \mid Q\rangle = \int_0^{\pi} P(\cos t)Q(\cos t)\, dt$.

1. Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Rappeler la définition et la relation de récurrence vérifiées par les polynômes de Tchebychev T_n. Donner le degré de T_n et son coefficient dominant.
3. Soit $n \ge 1$. Montrer que $(T_k)_{0\le k\le n}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. Calculer $\|T_n\|$.
4. On note F_n le sous-espace affine des polynômes unitaires de degré n : $F_n = X^n + \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que $\inf_{P\in F_n} \int_0^{\pi} P(\cos t)^2\, dt$ est atteint en $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ et calculer sa valeur.
5. On note F l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer $\inf_{P\in F} \int_0^{1} P(\cos t)^2\, dt$.

Exercice 20. ♣ – ●●○ – *Déterminants de Gram*

Soit E un espace préhilbertien. Si $x_1, \dots, x_n \in E$, on appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ la matrice

$$\operatorname{Gram}(x_1, \dots, x_n) = \big(\langle x_i \mid x_j\rangle\big)_{1\le i,j\le n}$$

et déterminant de Gram de $x_1, \dots, x_n$ le déterminant $G(x_1, \dots, x_n)$ de cette matrice.

1. Montrer que $\operatorname{rg}\operatorname{Gram}(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
   En déduire que $(x_1,\dots,x_n)$ est libre ssi $G(x_1,\dots,x_n) \neq 0$.

2. On suppose E euclidien orienté de dimension $n \geq 1$. Montrer que $G(x_1,\dots,x_n) = [x_1,\dots,x_n]^2$.

3. Dans le cas général, on note F un sous-espace vectoriel de E de dimension n et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de F. Montrer que, pour tout $x \in E$, $d(x,F)^2 = \dfrac{G(e_1,\dots,e_n,x)}{G(e_1,\dots,e_n)}$.

Exercice 21. ●●○ – *Minimisation de l'énergie*

1. Montrer que $(f,g) \mapsto \langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^1 \big(fg + f'g'\big)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

2. On pose $F = \big\{f \in \mathscr{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big) \mid f'' = f\big\}$. Montrer que $F^\perp = \big\{f \in \mathscr{C}^1([0,1]) \mid f(0) = f(1) = 0\big\}$.

3. Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale de $\mathscr{C}^1([0,1])$ sur F.

4. Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. On pose $E_{\alpha,\beta} = \big\{f \in \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big) \mid f(0) = \alpha, f(1) = \beta\big\}$.
   Montrer l'égalité $\displaystyle\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2)\,dt = \frac{(\alpha^2+\beta^2)\operatorname{ch} 1 - 2\alpha\beta}{\operatorname{sh} 1}$.

4 Endomorphismes remarquables

Exercice 22. ♣ – ●◐○ – *Inégalités sur les matrices orthogonales*

Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\Big|\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}\Big| \leq n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$.

Exercice 23. ♣ – ●◐○ – *Symétrie orthogonale et réflexions*

Soit E un espace euclidien de dimension n, soit s une symétrie orthogonale de E, par rapport à un sous-espace F de dimension d. Montrer que s est la composée de $n-d$ réflexions.

Exercice 24. ●◐○ – *Caractérisation des projecteurs orthogonaux*

Soit E un espace eucldien, soit p une projection de $\mathscr{L}(E)$.
Montrer que p est orthogonale ssi pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 25. ●◐○ – *Adjoint d'un endomorphisme*

Soit E un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $f^* : E \to E$ telle que pour tous $x, y \in E$, on a
$$\langle f(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f^*(y)\rangle.$$

2. Montrer que f^* est linéaire.

3. Montrer que l'application de $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ définie par $f \mapsto f^*$ est linéaire.
   Montrer que Φ est une symétrie ; Φ est-elle un automorphisme d'algèbre ?

4. Exprimer la matrice de f^* en fonction de celle de f dans une base orthonormée.

Exercice 26. ●●○ – *Endomorphismes commutant à $O(E)$*

Soit E un espace euclidien.
Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E commutant à tout élément de $O(E)$.

Exercice 27. ●●○ – *Les isométries sont affines*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer qu'il existe $A \in O(\mathbb{R}^n)$ et $Y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f : X \mapsto AX + Y$.

Exercice 28. ●●○ – *Conservation de l'orthogonalité*

Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E tel que

$$\forall x, y \in E, \langle x \mid y\rangle = 0 \implies \langle u(x) \mid u(y)\rangle = 0.$$

Que dire de u ?

Exercice 29. ♣ – ●●◐ – *Décomposition QR et inégalité de Hadamard*

1. **Décomposition QR.** Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_n^+(\mathbb{R})$ tels que $M = QR$.
2. **Inégalité de Hadamard.** Montrer $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), |\det M| \le \|C_1(M)\| \cdots \|C_n(M)\|$, en notant $C_k(M)$ la k-ème colonne de M.

5 Autres exercices

Exercice 30. ●◐○ – *Le retour de la diagonale nulle*

Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Tr}(f) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E - \{0\}$ tel que $\langle f(x) \mid x\rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f a une diagonale nulle.

Exercice 31. ♣ – ●●○ – *Simplexe régulier*

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Montrer qu'on peut trouver $x_1, \ldots, x_{n+1}$ unitaires dans E tels que $\forall i \neq j, \langle x_i \mid x_j\rangle = -\dfrac{1}{n}$.

Exercice 32. ♣ – ●●○ – *Méthode probabiliste d'Erdös*

Soient $v_1, \ldots, v_n$ unitaires dans un préhilbertien E. On veut montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\| \le \sqrt{n}$. On considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher. On pose $X = \|\sum_{i=1}^{n} X_i v_i\|$. Déterminer l'espérance de X et conclure.

Exercice 33. ●●○ – *Théorème de von Neumann*

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. On suppose que

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Montrer que la norme est euclidienne.

Exercice 34. ♣ – ●●◐ – *Un (cas particulier d'un) théorème de Grothendieck*

Soit $V \subset \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ un sous-espace vectoriel et $A > 0$ tels que $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leq A\|f\|_2$.

1. Montrer que V est strictement inclus dans $\mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.
2. Soit $(f_1,\dots,f_p)$ une famille orthonormée de V.
   (a) Pour tous $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$, majorer $\left\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\right\|_\infty$ en fonction de $\sum_{i=1}^n c_i^2$.
   (b) En déduire que $\sum_{i=1}^p f_i^2 \leq A^2$.
3. Déduire de la question précédente que V est de dimension finie et que $\dim V \leq A^2$.
4. Montrer que pour tout n, il existe un sous-espace vectoriel $V \subset \mathscr{CM}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ de dimension n et tel que $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leq \sqrt{n}\|f\|_2$.

Exercice 35. ♣ – ●●◐ – *Familles obtusangles*

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient $x_1,\dots,x_k$ dans E.
On suppose que pour tous $i \neq j$, $\langle x_i \mid x_j\rangle < 0$. Montrer que $k \leq n+1$.

Indications

Exercice 5. Cauchy-Schwarz astucieux.

Exercice 14. Définir des fonctions nulles en 0, mais valant 1 en dehors d'un petit voisinage de 0.

Exercice 17. Interpréter cet infimum en fonction de la distance de $t \mapsto t^3$ à l'espace des fonctions polynomiales de degré ≤ 2.

Exercice 22. Cauchy-Schwarz astucieux.

Exercice 29. Interpréter 1. comme une traduction matricielle du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.