28 - Fonctions de deux variables

Jeremy Daniel

1 Topologie de $\mathbb{R}^2$, continuité

1.1 Topologie de $\mathbb{R}^2$

NOTATION 1.1
On note $\|u\|$ la norme euclidienne d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, $\langle u \mid v \rangle$ le produit scalaire et $d(u,v) = \|u - v\|$ la distance entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 1.2 (Boule ouverte, boule fermée)
Soit $u \in \mathbb{R}^2$, soit $r > 0$. La boule ouverte $B(u,r)$ de centre u et de rayon r est définie par $B(u,r) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid d(u,v) < r\}$.
De même pour la boule fermée $\overline{B}(u,r)$, avec une inégalité large.

REMARQUE 1.3
En considérant $r = 0$, on peut aussi considérer $\emptyset$ comme une boule ouverte et le singleton $\{u\}$ comme une boule fermée.

DÉFINITION 1.4 (Ouvert de $\mathbb{R}^2$)
Une partie $U \subset \mathbb{R}^2$ est ouverte si $\forall u \in U, \exists r > 0 : B(u,r) \subset U$.

EXERCICE 1.5
Montrer qu'une boule ouverte est ouverte.

EXERCICE 1.6
Montrer que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^2$ est stable par union quelconque et par intersection finie.
Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est ouverte ssi elle s'écrit comme union de boules ouvertes.

DÉFINITION 1.7 (Fermé de $\mathbb{R}^2$)
Une partie $F \subset \mathbb{R}^2$ est fermée si son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte.

DÉFINITION 1.8 (Convergence dans $\mathbb{R}^2$)
Une suite de vecteurs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ converge vers un vecteur u si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(u_n, u) = 0$.

Exercice 1.9
Montrer qu'une partie F de $\mathbb{R}^2$ est fermée ssi toute suite convergente d'éléments de F a pour limite un vecteur de F.

1.2 Continuité

Définition 1.10 (Fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$)
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$, soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $u \in A$. On dit que f est continue en u si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall v \in A, d(u,v) < r \implies |f(v) - f(u)| \leq \varepsilon.$$

On dit que f est continue si elle est continue en tout point de A.

Proposition 1.11 (Caractérisation séquentielle)
La fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est continue en $u \in A$ ssi pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de limite u, la suite $\big(f(u_n)\big)$ a pour limite $f(u)$.

Remarque 1.12
Une fonction $f = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est continue si ses deux composantes sont continues.

Définition 1.13 (Applications partielles)
Soit f une fonction de $A \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, on peut considérer

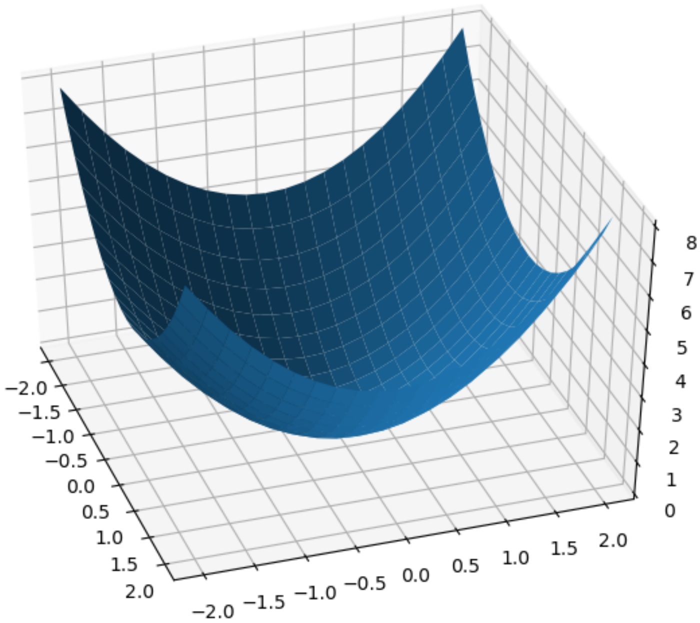
$$A_{x,1} = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\}.$$

L'application partielle de f, avec abscisse x, est $y \mapsto f(x,y)$, définie de $A_{x,1}$ dans $\mathbb{R}$.
On peut de même geler l'ordonnée y.

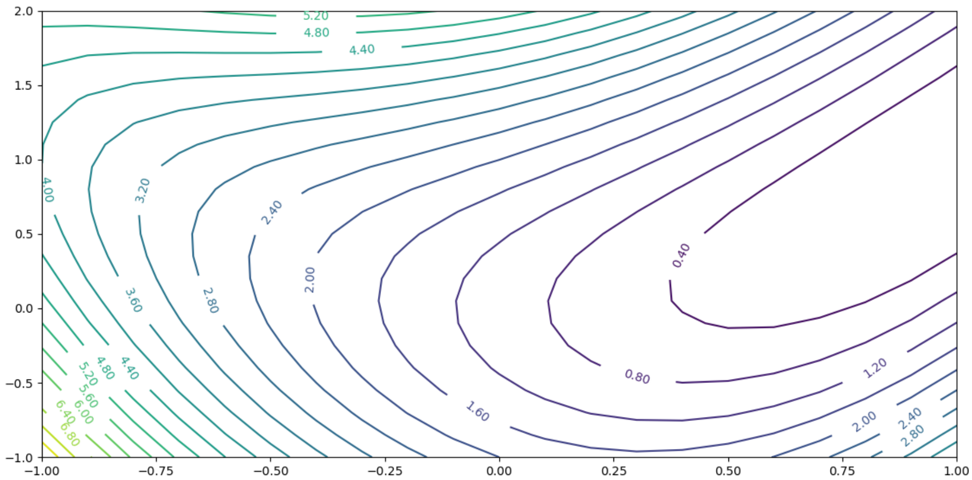
Attention !
Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, on montre que toutes les applications partielles sont continues. La réciproque est fausse. On note $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. On vérifie que f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, que les applications partielles $y \mapsto f(0,y)$ et $x \mapsto f(x,0)$ sont continues mais que f n'est pas continue en 0.

1.3 Représentations graphiques

Remarque 1.14 (Représentation comme surface dans l'espace)
Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on peut représenter son graphe dans l'espace : c'est l'ensemble des points de la forme $\big(x, y, f(x,y)\big)$. Ci-dessous une représentation d'un paraboloïde – surface associée à la fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ – sur le rectangle $]-2,2[\times]-2,2[$.



Remarque 1.15 (Représentation par lignes de niveau)
Plutôt que de chercher à représenter *toutes* les valeurs $f(x,y)$, on choisit uniquement certaines valeurs particulières et on rassemble les points (x,y) prenant ces valeurs communes. L'ensemble des points (x,y) tels que $f(x,y)$ est égal à une même valeur z est une *ligne de niveau* – c'est simplement l'ensemble $f^{-1}(z)$. En général, on représente ces lignes par un code couleur ou bien on indique la valeur commune le long de la ligne. Ci-dessous une représentations possible par lignes de niveau de la fonction $(x,y) \mapsto (1-x)^2 + (y-x^2)^2$ sur le rectangle $]-1,1[\times]-1,2[$.



Remarque 1.16
Le problème de la représentation d'une fonction $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est très différent. Pour tout t, $c(t) = (x(t), y(t))$ est un point de $\mathbb{R}^2$ et on peut simplement représenter l'ensemble $\Gamma = \{(x(t), y(t))\}$ des valeurs prises par c.
Il y a cependant un inconvénient à ne représenter que les valeurs de c : on ne sait pas à quel t une valeur correspond. On peut numéroter certains points de l'arc Γ par le t correspondant pour visualiser la vitesse/le sens de parcours de Γ.

Remarque 1.17
Il est assez délicat de visualiser une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On peut bien sûr représenter côte à côte ses deux composantes, qui sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; mais on perd la vue d'ensemble du comportement de la fonction.
Une autre possibilité est de représenter en chaque point de $\mathbb{R}^2$ une flèche d'origine ce point, correspondant à la valeur de la fonction en ce point. C'est ainsi que l'on représente le gradient d'une fonction.

2 Dérivées partielles

2.1 Dérivées partielles

Définition 2.1 (Dérivées partielles)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit $f : U \to \mathbb{R}$, soit $(x_0, y_0) \in U$.
La première dérivée partielle de f en (x_0, y_0) – si elle existe – est la dérivée en x_0 de l'application partielle $x \mapsto f(x, y_0)$ (bien définie au voisinage de x_0).
De même pour la deuxième dérivée partielle.

Notation 2.2
On note $\partial_x f(x_0, y_0)$, $\partial_1 f(x_0, y_0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ la première dérivée partielle de f en (x_0, y_0).
Notations analogues pour la deuxième dérivée partielle.

Attention !
L'existence de dérivées partielles en (x_0, y_0) n'implique pas la continuité en ce point. Dans l'exemple donné plus haut (après la définition 1.13), f est identiquement nulle sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées ; donc elle admet en $(0, 0)$ deux dérivées partielles nulles.

Définition 2.3 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)
Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et si les fonctions $(x, y) \mapsto \partial_1 f(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \partial_2 f(x, y)$ sont continues.

Définition 2.4 (Gradient)
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, le gradient de f, noté ∇f est défini par

$$\nabla f : U \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \big(\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)\big).$$

Remarque 2.5
On représente habituellement le gradient comme un *champ de vecteurs* : en tout point (x, y) de U, on place le vecteur $\nabla f(x, y)$ avec pour origine le point (x, y).

Définition 2.6 (Dérivée selon un vecteur)
Si $u = (h, k)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, la dérivée de f en (x_0, y_0), selon le vecteur u est – si elle existe – la dérivée en $t = 0$ de la fonction $t \mapsto f\big((x_0, y_0) + tu\big)$.
On note $\partial_u f(x_0, y_0)$ cette dérivée directionnelle.

Proposition 2.7
Avec les notations précédentes, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, elle admet une dérivée selon tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$\partial_u f(x_0, y_0) = h\partial_1 f(x_0, y_0) + k\partial_2 f(x_0, y_0).$$

2.2 Approximation locale

Définition 2.8 (Notation $o\big(\|(h, k)\|\big)$)
Soit g une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0, 0)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $g(h, k) = o\big(\|(h, k)\|\big)$ en $(0, 0)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : \forall (h, k) \in U, \|(h, k)\| < r \implies |g(h, k)| \leq \varepsilon \|(h, k)\|.$$

Remarque 2.9
Dans ces conditions, g est continue en $(0, 0)$ et a des dérivées partielles en $(0, 0)$, avec $g(0, 0) = \partial_1 g(0, 0) = \partial_2 g(0, 0) = 0$.

Théorème 2.10 (Développement limité à l'ordre 1)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On fixe $(x_0, y_0) \in U$. Alors,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)h + \partial_2 f(x_0, y_0)k + o\big(\|(h, k)\|\big).$$

Remarque 2.11
Notons $z_0 = f(x_0, y_0)$. L'équation $z - z_0 = \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$ est celle d'un plan (affine) $\mathcal{P}$. L'équation précédente dit que le graphe de f est très bien approché par ce plan en (x_0, y_0).
On dit que $\mathcal{P}$ est le plan tangent de f en (x_0, y_0).

Remarque 2.12
On peut encore écrire $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k)\rangle + o\big(\|(h, k)\|\big)$.
L'application $(h, k) \mapsto \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k)\rangle$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
On dira que cette application est la différentielle de f en (x_0, y_0).

Remarque 2.13
Cette expression montre que, pour augmenter la quantité $f(x, y)$, il faut infinitésimalement suivre en tout point la direction du gradient de f.

Remarque 2.14
On peut aussi préférer le point de vue des quantités infinitésimales. A l'ordre 1,

$$f(x+dx, y+dx) \cong f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

3 Dérivée de fonctions composées

Théorème 3.1 (Règle de la chaine)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y) : I \to U, t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
La fonction $\phi : t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$, définie de I dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $t \in I$,

$$\phi'(t) = \partial_1 f\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \partial_2 f\big(x(t), y(t)\big)y'(t).$$

Remarque 3.2
Notons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Alors $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$. La règle de la chaine se réécrit comme

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f\big(\gamma(t)\big) \mid \gamma'(t)\rangle.$$

Remarque 3.3
Avec des notations *plus physiciennes*,

$$\frac{d}{dt}\big(f(x(t), y(t))\big) = \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ou encore :

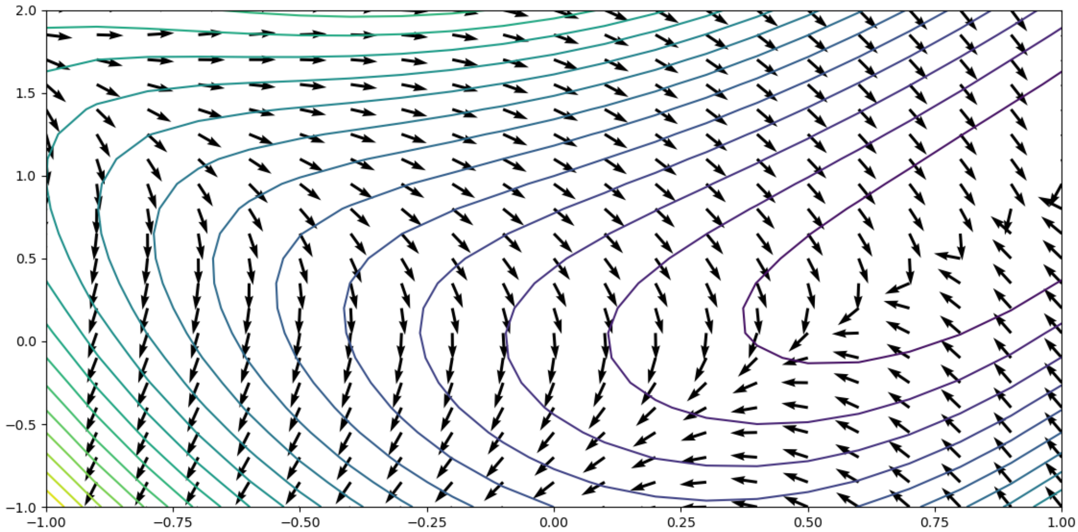
$$\frac{d}{dt}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Cette écriture offre des avantages pour la mémorisation. Il y a cependant deux inconvénients :
- On n'écrit pas nécessairement où les quantités sont évaluées.
- L'usage de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour désigner la première et deuxième dérivées partielles dépend d'un choix de noms pour les variables et peut entraîner des confusions. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que signifie une expression du type $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$?

Remarque 3.4
La fonction $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$ doit être comprise ainsi. On dispose d'une quantité f evoluant sur $\mathbb{R}^2$ – par exemple la température en le point de $\mathbb{R}^2$. On se déplace dans $\mathbb{R}^2$ au moyen de l'arc $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ et on étudie comment la quantité f évolue, quand on se déplace le long de cet arc.

Proposition 3.5 (Gradient et lignes de niveau)
Si la fonction $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ est constante, alors $\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big) \mid \gamma'(t)\rangle = 0$.

Remarque 3.6
Graphiquement, ceci signifie que le gradient est en tout point orthogonal à la ligne de niveau passant par le point. Ci-dessous une représentation de cette situation ; pour un dessin plus clair, on a normalisé le gradient.



4 Recherche d'extrema

Définition 4.1 (Extremum local, extremum global)
Soient $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$.
On dit que f admet un maximum global en $u \in A$ si

$$\forall v \in A, f(v) \leq f(u).$$

On dit que f admet un maximum local en $u \in A$ si

$$\exists r > 0, \forall v \in A \cap B(x, r), f(v) \leq f(u).$$

De même pour minimum global et local, en inversant les inégalités.

Proposition 4.2
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Si f admet un extremum local en (x_0, y_0), alors $\partial_1 f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) = 0$.

Remarque 4.3
La condition peut encore s'écrire $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Un tel point (x_0, y_0) est un point critique de f.

Attention !
Comme dans la recherche d'extrema d'une fonction de la variable réelle, plusieurs difficultés se présentent :

- Un point peut être critique pour f sans que f y réalise un extremum local. Considérer la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$ en $(0,0)$.
- Un extremum local peut ne pas être global.
- Si l'ensemble de définition de f n'est pas un ouvert, f peut présenter un extremum local en un point *sur le bord* de l'ensemble de définition.