27 - Familles sommables

Jeremy Daniel

1 Familles sommables de nombres réels positifs

Définition 1.1 (Somme d'une famille de réels positifs)
Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille de nombres réels positifs, indexée par un ensemble I. La somme $\displaystyle\sum_{k\in I} a_k$ est définie comme la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble $\left\{\displaystyle\sum_{k\in F} a_k\right\}$, où $F \subset I$ est fini.

Définition 1.2 (Famille sommable)
La famille $(a_k)_{k\in I}$ est sommable si la somme $\displaystyle\sum_{k\in I} a_k$ est finie.

Remarque 1.3
Si pour tout $k \in I$, $a_k \leq b_k$ et que $(b_k)_{k\in I}$ est sommable, alors $(a_k)_{k\in I}$ est sommable.
Mais il n'y a pas de sens en général à parler de comparaison asymptotique entre les a_k et les b_k (pas de o ou O).

Exercice 1.4
On suppose que $I = \mathbb{N}$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est convergente. Montrer que dans ce cas les deux notions de somme coïncident.

Remarque 1.5
Il y a un léger conflit de notations entre les deux approches. Du point de vue des séries, $\sum a_n$ ou $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ désigne plutôt la série et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa somme ; du point de vue des familles sommables, seule existe la notation $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ pour parler de la somme.

Le plus simple est de préférer systématiquement la notation $\sum a_n$ (sans indices) pour parler de la série.

Exercice 1.6
Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille sommable de réels strictement positifs.
Montrer que I est dénombrable.

Proposition 1.7 (Invariance par permutation)
Soit $(a_k)_{k\in I}$ *une famille de nombres positifs, soit* σ *une permutation de* I.
La famille $(a_k)_{k\in I}$ *est sommable ssi la famille* $(a_{\sigma(k)})_{k\in I}$ *est sommable.*
De plus, on a dans tous les cas $\displaystyle\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I} a_{\sigma(k)}$, *dans* $[0,+\infty]$.

Proposition 1.8 (Linéarité)
Soit I *un ensemble. L'ensemble* $\mathrm{Som}(I)$ *des familles sommables de nombres réels positifs indexées par* I *est stable par somme et multiplication par un réel positif.*
De plus, l'application somme

$$s : \mathrm{Som}(I) \to \mathbb{R}, (a_k)_{k\in I} \mapsto \sum_{k\in I} a_k$$

préserve la somme et la multiplication par un réel positif.

Théorème 1.9 (Sommation par paquets)
On suppose que I *est réunion disjointe des* I_j, *où* $j \in J$. *Soit* $(a_k)_{k\in I}$ *une famille de nombres positifs. On a l'égalité :*

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{j\in J} \Big(\sum_{k\in I_j} a_k \Big) \text{ dans } [0,+\infty].$$

En particulier, la famille $(a_k)_{k\in I}$ *est sommable ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
- *Pour tout* $j \in J$, *la famille* $(a_k)_{k\in I_j}$ *est sommable*
- *La famille* $\Big(\displaystyle\sum_{k\in I_j} a_{i_j} \Big)_{j\in J}$ *est sommable.*

Exercice 1.10
Pour quels $\alpha > 0$, la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est-elle sommable ?

Corollaire 1.11 (Fubini)
Soient $(a_k)_{k\in I}$ *et* $(b_\ell)_{\ell\in J}$ *deux familles de nombres réels positifs. On a*

$$\sum_{(k,\ell)\in I\times J} a_k b_\ell = \Big(\sum_{k\in I} a_k \Big) \Big(\sum_{\ell\in J} b_\ell \Big).$$

En particulier, si les deux familles ne sont pas identiquement nulles, la famille $(a_k b_\ell)_{(k,\ell)\in I\times J}$ *est sommable ssi les familles* $(a_k)_{k\in I}$ *et* $(b_\ell)_{\ell\in J}$ *sont sommables.*

2 Familles sommables de nombres complexes

Définition 2.1 (Famille sommable)
Une famille $(a_k)_{k\in I}$ de nombres complexes est sommable si la famille $\big(|a_k|\big)_{k\in I}$ est sommable.

Proposition 2.2
On a les relations suivantes sur la sommabilité des familles :

- *Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.*
- *Si* $(a_k)_{k\in I} \in \mathbb{C}^I$ *et* $(u_i)_{k\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ *sont telles que* $\forall k \in I, |a_k| \leq u_i$ *et si* $(u_i)_{k\in I}$ *est sommable, alors* $(a_k)_{k\in I}$ *est sommable.*
- *La famille* $(a_k)_{k\in I} \in \mathbb{R}^I$ *est sommable ssi les familles* $\big((a_k)_+\big)_{k\in I}$ *et* $\big((a_k)_-)_{k\in I}$ *le sont.*
- *La famille* $(a_k)_{k\in I} \in \mathbb{C}^I$ *est sommable ssi les familles* $\big(\mathrm{Re}(a_k)\big)_{k\in I}$ *et* $\big(\,\mathrm{Im}(a_k)\big)_{k\in I}$ *le sont.*

Notation 2.3
On note $\ell^1(I,\mathbb{R})$ et $\ell^1(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des familles sommables de réels/complexes indexées par I.

Définition 2.4 (Somme d'une famille sommable)
Si $(a_k)_{k\in I} \in \ell^1(I,\mathbb{R})$, sa somme $\displaystyle\sum_{k\in I} a_k$ est définie par

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I}(a_k)_+ - \sum_{k\in I}(a_k)_-.$$

Si $(z_k)_{k\in I} \in \ell^1(I,\mathbb{C})$, sa somme $\displaystyle\sum_{k\in I} z_k$ est définie par

$$\sum_{k\in I} z_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(z_k) + i\sum_{k\in I} \mathrm{Im}(z_k).$$

Remarque 2.5
Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum a_k$ est absolument convergente. De plus, les deux notions de somme coïncident.

Proposition 2.6 (Linéarité)
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, $\ell^1(\mathbb{K})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^I$. *De plus, l'application somme*

$$s : \ell^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, (a_k)_{k\in I} \mapsto \sum_{k\in I} a_k$$

est une forme linéaire.

Théorème 2.7 (Approximation par les sommes finies)
Soit $(a_k)_{k\in I} \in \ell^1(\mathbb{K})$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie finie* $F \subset I$ *telle que*

$$\Big|\sum_{k\in I} a_k - \sum_{k\in F} a_k\Big| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2.8
On précise ce résultat. Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille dans $\mathbb{K}$. Montrer l'équivalence entre

1. La famille $(a_k)_{k\in I}$ est sommable, de somme S.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \subset I$ finie telle que, pour tout F' finie contenant F,

$$\Big|\sum_{k\in F'} a_k - S\Big| \leq \varepsilon.$$

Proposition 2.9 (Invariance par permutation)
Si $(a_k)_{k\in I} \in \ell^1(\mathbb{K})$, alors pour toute permutation σ de I, $(a_{\sigma(k)})_{k\in I} \in \ell^1(\mathbb{K})$ et

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I} a_{\sigma(k)}.$$

Remarque 2.10
A contrario, si $\sum a_n$ est une série semi-convergente, pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on peut trouver une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \ell$. C'est le *théorème de réarrangement de Riemann.*

Théorème 2.11 (Sommation par paquets)
On suppose que I est réunion disjointe des I_j, pour $j \in J$. Si la famille $(a_k)_{k\in I}$ est sommable, alors :

1. *Pour tout $j \in J$, la famille $(a_k)_{k\in I_j}$ est sommable.*
2. *La famille $\displaystyle\Big(\sum_{k\in I_j} a_k\Big)_{j\in J}$ est sommable.*

Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{k\in I} a_k = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in I_j} a_k\Big)$.

Attention !
La réciproque est fausse. Considérer la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}$, définie par $a_n = 1$ si $n > 0$ et -1 sinon ; et pour tout $j \in \mathbb{N}^*, I_j = \{\pm j\}$.

Corollaire 2.12 (Théorème de Fubini)
Si les familles $(a_k)_{k\in I}$ et $(b_\ell)_{\ell\in J}$ sont sommables, la famille $(a_k b_\ell)_{(k,\ell)\in I\times J}$ aussi et

$$\sum_{(k,\ell)\in I\times J} a_k b_\ell = \Big(\sum_{k\in I} a_k\Big)\Big(\sum_{\ell\in J} b_\ell\Big).$$

Corollaire 2.13 (Produit de Cauchy)
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_p$ deux séries absolument convergentes. Alors, la série de terme général

$\displaystyle\sum_{n+p=k} a_n b_p$ *est absolument convergente et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n+p=k} a_n b_p\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{p=0}^{+\infty} b_p\Big)$.

Remarque 2.14
La somme finie $\displaystyle\sum_{n+p=k} a_n b_p$ peut être réécrite en $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$.

Remarque 2.15
Dans le cas de séries à termes positifs, on a toujours égalité entre les deux membres, en convenant qu'une somme divergente a pour somme $+\infty$.

Exemple 2.16
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Justifier la définition et montrer que

$$\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times), z \mapsto e^z$$

est un morphisme de groupes.