Fonctions de deux variables

Exercice 1. ◐○○ – *Calcul sur les gradients*

Soient f et g des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, soit ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Exprimer simplement les gradients de $\alpha f + \beta g$; fg ; $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) et $\phi \circ f$.

Exercice 2. ●○○ – *Dérivées partielles de la norme*

Montrer que la fonction norme $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ n'admet pas de dérivée partielle en $(0,0)$. Montrer que sa restriction à $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 3. ●○○ – *Étude en* $(0,0)$

On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x, y) = y$ sinon.

1. Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ selon tout vecteur.
2. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 4. ●○○ – *Dérivées de composées*

Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On note $p = \partial_1 f$ et $q = \partial_2 f$. Exprimer en fonction de p et q les dérivées par rapport à x et y de

1. $g_1(x, y) = f(x - y, x + y)$
2. $g_2(x, y) = f(y, x)$
3. $g_3(x, y) = x^2 f(2xy, xe^y)$

Exercice 5. ●◐○ – *Fonctions à gradient nul*

1. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\nabla f = 0$. Montrer que f est constante.
2. Donner un exemple d'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et de fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U non constante telle que $\nabla f = 0$.

Exercice 6. ●◐○ – *Fonctions homogènes*

Une fonction g continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est homogène de degré r si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, g(tx, ty) = t^r g(x, y).$$

Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est homogène de degré r, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r - 1$.
2. Montrer que f est homogène de degré r ssi, en notant $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y)$:

$$\langle \nabla f \mid I \rangle = rf.$$

Exercice 7. ●●○ – *Résolution d'équations aux dérivées partielles par changement de variables*

1. Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y)$ par le changement de variables $(u,v)=(x+y,x-y)$.

2. Résoudre $y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par un passage en coordonnées polaires.

3. Résoudre sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par le changement de variables $(x,y)=\left(\dfrac{u}{v},\dfrac{v^2}{u}\right)$.

Exercice 8. ●●○ – *Fonction taux d'accroissement*

Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\frac{g(x)-g(y)}{x-y} \text{ si } x\neq y\ ;\ f(x,y)=g'(x) \text{ si } x=y.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)$.

Exercice 9. ●◐○ – *Calcul d'extrema*

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$

2. $f_2(x,y)=5x^2-4xy+y^2-6x+2y$

3. $f_3(x,y)=x^3+y^2-2xy$

Exercice 10. ●●○ – *Extrema sur un fermé*

Soit $f(x,y)=y^2-x^2y+x^2$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-1\leq y\leq 1-x^2\right\}$.

1. Représenter D.

2. Déterminer les points critiques de f en l'intérieur de D (= ensemble des points contenus dans une boule ouverte contenue dans D)

3. On admet que f admet un maximum et un minimum sur D. Les déterminer.

Exercice 11. ●●○ – *Points critiques d'une fonction convexe*

Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall p,q\in\mathbb{R}^2$, $\langle\nabla f(p)-\nabla f(q)\mid p-q\rangle\geq 0$.
Montrer qu'un point critique de f est un minimum.