# Familles sommables

## 1 Sommabilité

**Exercice 1.** ●◐○ – *Étude de sommabilité*

Les familles suivantes sont-elle sommables ($\alpha > 0$) ?

1. $\left(\dfrac{2^n + 3^m}{(n+m)!}\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\dfrac{1}{n^2 - m^2}\right)_{\substack{n,m\in\mathbb{N}^* \\ n\neq m}}$
3. $\left(\dfrac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2\setminus\{(0,0)\}}$
4. $\left(\dfrac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}\cap]1,+\infty[}$

**Exercice 2.** ●◐○ – *Familles des* $\dfrac{1}{p^\alpha + q^\alpha}$

Donne une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\left(\dfrac{1}{p^\alpha + q^\alpha}\right)_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ soit sommable.

## 2 Calculs de sommes

**Exercice 3.** ●◐○ – *Une somme double*

Soit $p \geq 3$ un entier. Calculer $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$.

**Exercice 4.** ●●○ – *Une expression de* $\zeta(3)$

Montrer que $\displaystyle\sum_{n,m\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{nm(n+m)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{H_n}{n^2} = 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{H_n}{(n+1)^2} = 2\zeta(3)$.

**Exercice 5.** ●●◐ – *Une somme avec l'indicatrice d'Euler*

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\phi(n)}{2^{n-1}}$.

## 3 Autres exercices

**Exercice 6.** ●●◐ – *Théorème de réarrangement de Riemann*

Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Montrer qu'il existe une bijection $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

**Exercice 7.** ●●◐ – *Séries d'Eisenstein*

On définit $\mathbb{H} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\right\}$.

1. Soit $k$ un entier et $z \in \mathbb{H}$. Montrer qu'il existe $A_z \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{1}{\mid az+b\mid^k} \leq \frac{A_z}{\max\big(\mid a\mid, \mid b\mid\big)^k}.$$

2. Soit $k \geq 3$ un entier et $z \in \mathbb{H}$. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(nz+m)^k}\right)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est sommable.

3. Soit $G_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto \displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(nz+m)^k}$. Calculer $G_k$ quand $k$ est impair.

4. On suppose $k$ pair. Montrer que $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} G_k(iy) = 2\zeta(k)$.