DM 24 - Théorèmes de Weierstrass et Fejér

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la fonction définie par $e_k(x) = e^{ikx}$. On appelle *polynôme trigonométrique* toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, appartenant à $\mathrm{Vect}\big((e_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$.

Dans ce problème, on démontre les deux théorèmes suivants d'approximation polynomiale :

- *Théorème de Weierstrass* : si $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.
- *Théorème de Fejér*[1] : si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est 2π-périodique, alors il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On notera selon le cas $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de l'ensemble des valeurs $f(x)$, avec x dans $[a,b]$ ou dans $\mathbb{R}$.

0. Pourquoi $\|f\|_\infty$ est-il bien défini dans les deux cas ?

1 Théorème de Weierstrass *via* les polynômes de Bernstein

Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_{n,x}$ une variable aléatoire[2] de loi $\mathscr{B}(n,x)$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto E\left(f\left(\dfrac{X_{n,x}}{n}\right)\right)$ est polynomiale de degré au plus n.

On note $B_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ le *polynôme de Bernstein* tel que $\forall x \in [0,1], B_n(f)(x) = E\left(f\left(\dfrac{X_{n,x}}{n}\right)\right)$. On fixe $\varepsilon > 0$.

2. Justifier l'existence de $\delta > 0$ tel que :

$$\forall y,z \in [0,1], |y-z| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_{n,x}$ l'évènement : $\left(\left|\dfrac{X_{n,x}}{n} - x\right| \leq \delta\right)$.

3. Justifier les égalités et l'inégalité suivantes :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left|E\left(f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right) - f(x)\right)\right| \leq E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right) - f(x)\right|\right) = E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right) - f(x)\right|\mathbb{1}_{A_{n,x}}\right) + E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right) - f(x)\right|\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}\right).$$

[1] aussi appelé *théorème de Weierstrass trigonométrique*

[2] L'univers de définition de $X_{n,x}$ dépend *a priori* de n et de x. Cela n'a pas d'importance car on travaille à x et n fixés.

4. Montrer que $E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{A_{n,x}}\right)\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

5. Montrer que $E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}\right)\leq 2\|f\|_\infty P(\overline{A_{n,x}})$.

6. En déduire que $\forall x\in[0,1],\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$|B_n(f)(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

7. En déduire que la suite d'applications polynomiales $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

8. Démontrer le théorème de Weierstrass.

9. **Une application :** soit $f\in\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)\,dt=0$.
   Montrer que $f=0$.

10. Que dire d'une fonction $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe une suite P_n d'applications polynomiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

2 Théorème de Fejér

Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on note

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt$$

le n-ème *coefficient de Fourier* de f. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $S_n(f)$ la *série de Fourier* de f d'ordre n, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$S_n(f)(x)=\sum_{|k|\leq n}c_k(f)e^{ikx}.$$

Pour tout $n\geq 1$, on note $\sigma_n(f)$ la moyenne de Cesàro des $S_n(f)$, définie par

$$\sigma_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(f).$$

On va montrer que $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

11. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\sigma_n(f)$ est un polynôme trigonométrique.

Pour tout $n\geq 1$, on définit le *noyau de Fejér* d'ordre n par $F_n(x)=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|j|\leq k}e^{ijx}$.

12. Montrer les propriétés suivantes de F_n :

    a) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\,dt=1$

    b) $\forall x\in\mathbb{R},\sigma_n(f)(x)=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)F_n(t)\,dt$

c) $\forall x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}, F_n(x) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \in \mathbb{R}_+$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme à la question I.2, on peut justifier l'existence d'un $\delta > 0$ tel que

$$\forall y, z \in [-\pi, \pi], |z - y| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quitte à diminuer δ, on peut supposer $\delta < \pi$.

13. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - \sigma_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(t)|f(x) - f(x-t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(t)|f(x) - f(x-t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} F_n(t)|f(x) - f(x-t)|dt.$$

14. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(t)|f(x) - f(x-t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

15. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(t)|f(x) - f(x-t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} F_n(t)|f(x) - f(x-t)|dt \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}.$$

16. En déduire que $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, quand $n \to +\infty$.

17. Soient $f, g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ deux fonctions 2π-périodiques.
Montrer que si $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$.

3 Équivalence des deux théorèmes

18. (Question bonus)
Déduire de l'énoncé du théorème de Weierstrass le théorème de Fejér, et réciproquement.