DM 24 - Théorèmes de Weierstrass et Fejér

0. Si $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, f est bornée sur le segment $[a,b]$ par le théorème des bornes atteintes.
Si $f \in \mathscr{C}\big((\mathbb{R},\mathbb{C}\big)$ est 2π-périodique, on a l'égalité $f(\mathbb{R}) = f([0,2\pi])$. Comme f est continue sur le segment $[0,2\pi]$, f est bornée sur ce segment par le théorème des bornes atteintes. Elle est donc aussi bornée sur $\mathbb{R}$.

1 Théorème de Weierstrass *via* les polynômes de Bernstein

1. Par le théorème de transfert, on a
$$E\left(f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$
Cette expression est bien polynomiale de degré au plus n.

2. Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est uniformément continue par le théorème de Heine. D'où le résultat.

3.
   - L'égalité $|B_n(f)(x)-f(x)| = \left|E\left(f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right)\right|$ vient de la définition de $B_n(f)(x)$ et du fait que $E\big(f(x)\big) = f(x)$ (car $f(x)$ est une constante).
   - L'inégalité $\left|E\left(f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right)\right| \le E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\right)$ vient de l'inégalité triangulaire.
   - L'égalité $E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\right) = E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{A_{n,x}}\right)+E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}\right)$ vient de ce que $1 = \mathbb{1}_{A_{n,x}} + \mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}$ et de la linéarité de l'espérance.

4. $\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{A_{n,x}}$ est non nulle seulement quand $\left|\frac{X_{n,x}}{n}-x\right| \le \delta$. Dans ce cas, par définition de δ, on a $\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, $\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{A_{n,x}} \le \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, par croissance de l'espérance, son espérance aussi est inférieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{2}$.

5. Par inégalité triangulaire, on a $\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}} \le \left(f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)+|f(x)|\right)\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}} \le 2\|f\|_\infty\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}$.
Par croissance de l'espérance, on a donc :
$$E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}\right) \le 2\|f\|_\infty E(\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}) = 2\|f\|_\infty P(\overline{A_{n,x}}).$$

6. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a
$$P(\overline{A_{n,x}}) = P(|X_{n,x}-nx| > n\delta) \le \frac{V(X_{n,x})}{n^2\delta^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}$$
car $x(1-x) \le \frac{1}{4}$ si $x \in [0,1]$.
En combinant les inégalités des questions 3, 4 et 5, on a le résultat.

7. Étant fixés ε et δ, la quantité $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Alors, pour $n \geq N$, on a $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ceci est indépendant de x ; donc pour $n \geq N$, $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc $B_n(f)$ converge uniformément vers f, quand n tend vers $+\infty$.

8. Le théorème de Weierstrass est démontré pour $[a,b] = [0,1]$ puisqu'on a vu que les $B_n(f)$ étaient des applications polynomiales.
Passons au cas général. On considère $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. La fonction $g : x \mapsto f\big(a + x(b-a)\big)$ est continue sur $[0,1]$. On peut donc considérer une suite P_n de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers g sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose maintenant $Q_n(x) = P_n\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$. Alors, les Q_n sont des applications polynomiales et

$$\forall x \in [a,b], |f(x) - Q_n(x)| = |g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)| \leq \|g - P_n\|_\infty,$$

la norme infinie étant prise sur $[0,1]$. Ceci montre que Q_n tend uniformément vers f sur $[a,b]$.
On a juste reparamétré le segment $[a,b]$ *par le segment* $[0,1]$.

9. Par linéarité, si P est un polynôme, on a $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$. On considère maintenant une suite de polynômes P_n convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(t)^2 dt - \int_a^b P_n(t)f(t)dt\right| = \left|\int_a^b f(t)\big(f(t) - P_n(t)\big)dt\right| \leq (b-a)\|f - P_n\|_\infty \|f\|_\infty,$$

les normes infinies étant prises sur $[a,b]$. Le membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $\displaystyle\int_a^b P_n(t)f(t)dt$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(t)^2 dt$. Mais cette suite est identiquement nulle. Donc, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. Comme f^2 est positive et continue, on a $f^2 = 0$ par propriété de stricte positivité de l'intégrale. Finalement, $f = 0$.

10. Une telle fonction f doit elle-même êter polynomiale (ce qui limite l'intérêt...).
Considérons en effet P_n convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $\|P_n - f\|_\infty \leq 1$. Mais alors, Pour tout $n \geq N$, $\|P_n - P_N\|_\infty \leq 2$. Or, $P_n - P_N$ est une application polynomiale. Elle ne peut être bornée sur $\mathbb{R}$ que si elle est constante. Ainis, il existe pour tout $n \geq N$, une constante c_n telle que $P_n = P_N + c_n$. La convergence uniforme de P_n implique la convergence de c_n (en évaluant en 0 p. ex., on trouve que $c_n \to f(0) - P_N(0)$). Et donc, par passage à la limite, $f = P_N + \lim\limits_n c_n$.

2 Théorème de Fejér

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f) = \displaystyle\sum_{|k| \leq n} c_n(f) e_k$, donc $S_n(f)$ est un polynôme trigonométrique.
Pour tout $n \geq 1$, $\sigma_n(f)$ est une combinaison linéaire des polynômes trigonométriques $S_k(f)$, donc c'est un polynôme trigonométrique.

12. a) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = \dfrac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|j|\le k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}\,dt.$

L'intégrale vaut 2π si $j=0$ et 0 sinon (primitive $t\mapsto \dfrac{e^{ijt}}{j}$ qui prend même valeur en π et $-\pi$). Donc,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi = 1.$$

b) Soit $x\in\mathbb{R}$. On calcule

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|j|\le k} c_j(f)e^{ijx}\\ &= \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|j|\le k}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ij(x-t)}\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_n(x-t)\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)F_n(u)(-du)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)F_n(u)\,du.\end{aligned}$$

Pour le passage à l'avant-dernière ligne, on fait le changement de variable $u = x-t$. Pour le passage à la dernière ligne, on utilise que $u\mapsto f_n(x-u)F_n(u)$ est 2π-périodique, ce qui implique que l'intégrale de cette fonction sur un segment de longueur 2π ne dépend pas du segment (*on le montre en utilisant des relations de Chasles*).

c) Par le caclul habituel à base de sommes d'exponentielles et de formules de l'angle moitié, on trouve

$$D_n(x) = \frac{\sin\big((n+1/2)x\big)}{\sin\big(x/2\big)},$$

si $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$. On peut faire une nouvelle somme à partir de là, de façon pédestre. Mais on peut aussi utiliser l'astuce diabolique suivante :

$$D_n(x) = \frac{2\sin\big(x/2\big)\sin\big((n+1/2)x\big)}{2\sin^2\big(x/2\big)} = \frac{\cos(nx)-\cos\big((n+1)x\big)}{2\sin^2(x/2)},$$

en utilisant les formules de linéarisation. Un téléscopage immédiat donne alors :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D_n(x) = \frac{1}{n}\times\frac{1-\cos(nx)}{2\sin^2(x/2)} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2.$$

13. Par la relation (b) précédente, on a

$$f(x)-\sigma_n(f)(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)f(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)(f(x)-f(x-t))\,dt.$$

On applique alors une relation de Chasles pour couper en trois morceaux, puis on passe à la valeur absolue et on applique l'inégalité triangulaire (et comme $F_n\ge 0$, il n'y a pas besoin de valeur absolue dessus).

14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $t \in [-\delta, \delta]$, $|x-(x-t)| \leq \delta$. Donc, par définition de δ, $|f(x)-f(x-t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Alors,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(t)|f(x)-f(x-t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

15. On majore $|f(x)-f(x-t)|$ par $2\|f\|_\infty$. De plus, si $t \in [-\pi, -\delta]$ ou si $t \in [\delta, \pi]$, $F_n(t) \leq \dfrac{1}{n\sin^2(\delta/2)}$, par l'expression explicite trouvée en 12.c. L'expression de gauche (la somme des deux intégrales de la question) est donc majorée par

$$\frac{1}{2\pi} \times \left(2\|f\|_\infty \times \frac{1}{n\sin^2(\delta/2)} \times 2(\pi-\delta)\right) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\delta/2)}.$$

16. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(t)|f(x)-f(x-t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} F_n(t)|f(x)-f(x-t)|dt \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}.$$

17. Mises ensemble, les inégalités donnent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)-\sigma_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}.$$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\dfrac{2\|f\|_\infty}{n\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour un tel n, on a alors $\|f-\sigma_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon$. Ce qui montre la convergence uniforme de $\sigma_n(f)$ vers f.

18. Au vu de la définition de $\sigma_n(f)$ et $\sigma_n(g)$, si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(g)$, alors $\sigma_n(f) = \sigma_n(g)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sigma_n(f)(x)$ tend vers $f(x)$ et $\sigma_n(g)(x)$ tend vers $g(x)$ (puisqu'on a montré la convergence uniforme et que celle-ci implique la convergence simple = valeur par valeur). Donc, par unicité de la limite, on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3 Équivalence des deux théorèmes

19. Lâchement laissé au lecteur/à la lectrice.