

# 29 - Notes sur les sous-espaces affines

Jeremy Daniel

## 1 Sous-espaces affines

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$ .

DÉFINITION 1.1 (Sous-espace affine)

Une partie  $\mathcal{A}$  de  $E$  est un *sous-espace affine* de  $E$  s'il existe un vecteur  $v \in \mathcal{A}$  et un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  tel que

$$\mathcal{A} = \{v + u \mid u \in F\}.$$

REMARQUE 1.2

On obtient donc un sous-espace affine de  $E$  en considérant un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  et en le *translatant* par un vecteur  $v$  de  $E$ .

**Points et vecteurs.** Quand on parle de sous-espaces affines, il peut être commode de distinguer les vocabulaires de la géométrie affine et de la géométrie vectorielle.

Dans la présentation que nous avons faite des espaces vectoriels, les éléments de  $E$  sont vus comme des *vecteurs*, c'est-à-dire – si on prend le point de vue des sciences physiques ou industrielles – comme des *flèches*. Mais on peut aussi adopter un point de vue *affine* et considérer les éléments de  $E$  comme des *points* : l'identification se fait en associant à chaque vecteur, l'extrémité de la flèche qui correspond à ce vecteur et d'origine l'élément 0 de  $E$ . Par exemple, dans  $\mathbb{R}^2$ , l'élément  $(1, 2)$  peut être vu

- ou bien comme le vecteur correspondant à une flèche allant de 1 vers la droite et de 2 vers le haut (point de vue vectoriel) ;
- ou bien comme le point de coordonnées  $(1, 2)$  dans le repère usuel (point de vue affine).

Dans la suite, pour désigner des éléments de  $E$ , on écrit des lettres majuscules  $M, N...$  si on adopte le point de vue affine ; et on utilise des lettres minuscules surmontées de flèches  $\vec{u}, \vec{v}...$  si on adopte le point de vue vectoriel. Bien sûr, ces deux points de vue sont compatibles et peuvent être vus simultanément.

NOTATION 1.3

Si  $M$  et  $N$  sont deux points de  $E$ , on note  $\overrightarrow{MN}$  le vecteur  $N - M$ .

On a donc la relation  $N = M + \overrightarrow{MN}$ .

ATTENTION !

Avec cette façon d'écrire les choses, le point  $M$  est véritablement *égal* au vecteur  $\overrightarrow{OM}$  (où  $O$  est le point correspondant au vecteur nul, l'*origine* de l'espace). C'est un peu gênant... La bonne façon de faire consisterait à distinguer l'espace des points et l'espace des vecteurs ; mais on n'entre pas dans ces détails dans les programmes de classes préparatoires.

DÉFINITION 1.4 (Sous-espace affine - définition alternative)

Une partie  $\mathcal{A}$  de  $E$  est un sous-espace affine de  $E$  s'il existe un point  $M$  de  $E$  tel que la partie

$$F = \{\overrightarrow{MN} \mid N \in \mathcal{A}\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

REMARQUE 1.5

En fait, dans la définition précédente, n'importe quel point de  $\mathcal{A}$  convient.

PROPOSITION 1.6

Soit  $\mathcal{A}$  un sous-espace affine de  $E$ . Pour tout point  $M$  de  $\mathcal{A}$ , la partie

$$F_M = \{\overrightarrow{MN} \mid N \in \mathcal{A}\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ . De plus,  $F_M$  ne dépend pas du point  $M$  choisi.

*Démonstration.* Par définition, on sait qu'il existe un point  $M_0$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $F_{M_0}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Considérons un autre point  $M$  de  $\mathcal{A}$ .

Si  $\vec{v}$  est dans  $F_M$ , on peut trouver un  $N$  dans  $\mathcal{A}$  tel que  $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ . Alors  $\vec{v} = -\overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{M_0N}$ . Comme  $F_{M_0}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $\vec{v}$  est dans  $F_{M_0}$ , comme combinaison linéaire de vecteurs de  $F_{M_0}$ .

Réciproquement, on considère  $\vec{w}$  un vecteur de  $F_{M_0}$ . Il existe donc un point  $N$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $\vec{w} = \overrightarrow{M_0N}$ . On a  $M + \vec{w} = M + \overrightarrow{M_0N} = M_0 + (\overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{M_0N})$ . Comme  $F_{M_0}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $\overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{M_0N}$  est dans  $F_{M_0}$  et donc  $M + \vec{w}$  est dans  $\mathcal{A}$ . Donc  $\vec{w}$  est dans  $F_M$ .

Par double inclusion, on a montré que  $F_M = F_{M_0}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

DÉFINITION 1.7 (Direction d'un sous-espace affine)

Si  $\mathcal{A}$  est un sous-espace affine, le sous-espace vectoriel  $F_M$  (indépendant du point  $M$  choisi dans  $\mathcal{A}$ ) est la *direction* de  $\mathcal{A}$ . On note souvent  $\vec{\mathcal{A}}$  ce sous-espace vectoriel.

EXEMPLES 1.8

- Dans  $\mathbb{R}^2$ , les sous-espaces affines sont les singletons (i. e. les points), de direction le sous-espace vectoriel  $\{0\}$ , les droites affines (ne passant pas nécessairement par l'origine) et  $\mathbb{R}^2$  lui-même.

- Dans  $\mathbb{R}^3$ , les sous-espaces affines sont les points, les droites affines, les plans affines et  $\mathbb{R}^3$  lui-même.

**DÉFINITION 1.9** (Hyperplan affine)

Un *hyperplan affine* de  $E$  est un sous-espace affine de  $E$  dont la direction est un hyperplan vectoriel de  $E$ .

**THÉORÈME 1.10** (Intersection de sous-espaces affines)

Soit  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces affines de  $E$ . Alors,  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$  est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de  $E$  de direction  $\bigcap_{i \in I} \vec{\mathcal{A}}_i$ .

*Démonstration.* On suppose que l'intersection est non vide et on considère  $M$  un point dedans. L'énoncé revient à dire que pour tout point  $N$  de  $E$ , on a l'équivalence :

$$N \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \iff \overrightarrow{MN} \in \bigcap_{i \in I} \vec{\mathcal{A}}_i.$$

Or le premier terme est équivalent à

$$\forall i \in I : N \in \mathcal{A}_i$$

tandis que le second est équivalent à

$$\forall i \in I : \overrightarrow{MN} \in \vec{\mathcal{A}}_i.$$

Or, pour tout  $i$  dans  $I$ , on a par définition l'équivalence

$$N \in \mathcal{A}_i \iff \overrightarrow{MN} \in \vec{\mathcal{A}}_i.$$

Ceci conclut la preuve. □

**ATTENTION !**

Ne pas oublier que – contrairement au cas des espaces vectoriels – l'intersection peut être vide. Par exemple, deux droites parallèles et distinctes dans  $\mathbb{R}^2$  ont une intersection vide.

## 2 Sous-espaces affines et applications linéaires

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur le même corps.

La notion de sous-espace affine permet d'unifier un certain nombre de résultats du type : *solution générale égale solution particulière + solution de l'équation homogène.*

### THÉORÈME 2.1

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire et  $y$  un vecteur de  $F$ .

Alors, l'image inverse  $\mathcal{E}_y = f^{-1}(y) \subset E$  est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de  $E$ . Dans ce cas, la direction de  $\mathcal{E}_y$  est égale à  $\text{Ker}(f)$ .

*Démonstration.* On suppose que  $\mathcal{E}_y$  est non vide, c'est-à-dire que  $y$  est dans l'image de  $f$ . Soit  $x_0$  un élément de  $\mathcal{E}_y$ , c'est-à-dire un antécédent de  $y$  par  $f$ . Un élément  $x$  de  $E$  est dans  $\mathcal{E}_y$  si, et seulement si  $f(x) = f(x_0)$ . C'est encore équivalent à  $x - x_0 \in \text{Ker}(f)$ . Donc,  $\mathcal{E}_y = x_0 + \text{Ker}(f)$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

### REMARQUE 2.2

On a rencontré cette situation à plusieurs reprises dans le cours et on en donne une liste non exhaustive.

**Système linéaire.** On considère un système linéaire à  $p$  équations dans  $\mathbb{K}^n$ , d'inconnues  $(x_1, \dots, x_n)$ . On sait qu'on peut écrire ce système matriciellement sous la forme  $AX = B$ , avec  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  la matrice du système,  $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  le vecteur colonne correspondant au second membre du système.

Résoudre le système, c'est chercher l'ensemble des antécédents de  $B$  par l'application linéaire  $A$  (on identifie  $A$  avec l'application linéaire de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}^p$  qu'elle représente). D'après ce qui précède, cet ensemble de solutions est soit vide, soit un sous-espace affine.

Dans le cas où il est non vide, on obtient une solution générale comme la somme d'une solution particulière et d'un élément du noyau de  $A$  (solution de l'équation homogène  $AX = 0$ ).

**Équations différentielles linéaires.** On considère par exemple une équation différentielle linéaire de degré 2 à coefficients constants.

L'inconnue est  $y$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles et  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  fixée. On cherche les fonctions  $y$  vérifiant, pour tout réel  $t$  :

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t).$$

Notons  $E$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{K}$ . Notons  $D : E \rightarrow E$  l'application linéaire définie par  $D(y) = y'$ .

Résoudre l'équation différentielle revient à chercher les antécédents de  $f$  par l'application linéaire  $D^2 + aD + b\text{Id}_E$ . Cet ensemble de solutions est donc soit vide, soit un sous-espace affine de  $E$ . En fait, la théorie des équations différentielles nous apprend qu'il y a toujours des solutions ; de plus, l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y'' + ay' + by = 0$$

est de dimension 2.

Concrètement, on retient que les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène, ces solutions homogènes formant un

espace de dimension 2 (la description de ce sous-espace de dimension 2 est obtenue *via* le polynôme caractéristique de l'équation différentielle).

**Polynômes interpolateurs.** On considère  $E = \mathbb{K}[X]$  et on se donne  $x_0, \dots, x_n$  distincts dans  $\mathbb{K}$  et  $y_0, \dots, y_n$  non nécessairement distincts dans  $\mathbb{K}$ . On cherche à décrire l'ensemble  $\mathcal{S}$  des polynômes  $P$  tels que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :  $P(x_i) = y_i$ .

Considérons  $f : E \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ , définie par  $f(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n))$ . C'est une application linéaire et  $\mathcal{S}$  est l'image inverse de  $(y_0, \dots, y_n)$ . Donc  $\mathcal{S}$  est soit vide, soit un sous-espace affine de  $E$ , dirigé par le noyau de  $f$ .

Un polynôme est dans  $\text{Ker } f$  ssi il a tous les  $x_i$  comme racines, c'est-à-dire s'il est un multiple de  $Q = \prod_{i=0}^n (X - x_i)$ .

La théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange nous apprend que  $\mathcal{S}$  n'est jamais vide : en effet, le polynôme

$$L = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

est dans  $\mathcal{S}$ .

Finalement  $\mathcal{S} = \{L + QP \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ . On remarquera que  $L$  est l'unique polynôme de  $\mathcal{S}$  de degré minimal (au plus  $n$ ).

### 3 Sous-espaces affines en dimension 2 et 3

#### REMARQUE 3.1

La discussion faite pour les espaces vectoriels sur la *dualité* paramétrage et équations d'un sous-espace vectoriel se généralise au cas des sous-espaces affines.

On détaille ce qui se passe en dimension 2 et 3.

**Droite affine dans  $\mathbb{K}^2$ .** Une droite affine  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{K}^2$  peut – par définition – être décrite par la donnée d'un point  $M$  sur la droite et d'un vecteur  $\vec{u}$  dans la direction  $\overrightarrow{\mathcal{D}}$  de  $\mathcal{D}$  (on parle de *vecteur directeur*).

De façon équivalente, elle est entièrement déterminée par la donnée de deux points distincts  $M$  et  $N$  : le point  $N$  donne le vecteur directeur  $\overrightarrow{MN}$  et *vice versa*.

La direction  $\overrightarrow{\mathcal{D}}$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^2$  engendré par  $\vec{u}$ . On sait qu'on peut le voir comme le noyau d'une forme linéaire  $\ell$  définie sur  $\mathbb{K}^2$ . Alors,  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des points  $P$  de  $\mathbb{K}^2$  vérifiant :

$$\ell(P) = \ell(M).$$

En effet, cet ensemble de solutions contient  $M$  et il est dirigé par  $\mathbb{K}\vec{u}$  par construction.

#### EXERCICE 3.2

Déterminer une équation de la droite  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{K}^2$  passant par  $M = (2, 3)$  et  $N = (3, 4)$ .

On peut faire le chemin inverse : partir d'une équation et donner un paramétrage de la droite (un point et un vecteur directeur ou deux points distincts). Cela revient à résoudre un système linéaire (en l'occurrence, il n'y a qu'une équation).

**Droite affine dans  $\mathbb{K}^3$ .** De nouveau, une telle droite  $\mathcal{D}$  est décrite par la donnée d'un point  $M$  et d'un vecteur directeur  $\vec{u}$ . Comme  $\mathbb{K}\vec{u}$  est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de  $\mathbb{K}^3$ , il peut être vu comme l'intersection des noyaux de deux formes linéaires  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Alors  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des points  $P$ , solutions du système d'équations  $\ell_1(P) = \ell_1(M)$  et  $\ell_2(P) = \ell_2(M)$ .

#### EXERCICE 3.3

Déterminer un système d'équations de la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $M = (1, 2, 3)$ , de coefficient directeur  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ .

**Plan affine dans  $\mathbb{K}^3$ .** Un tel plan  $\mathcal{P}$  est décrit par la donnée d'un point  $M$  et de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non colinéaires. C'est équivalent à la donnée de 3 points non alignés  $M, N_1, N_2$  de  $\mathcal{P}$  en posant  $\vec{u} = \overrightarrow{MN_1}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{MN_2}$ .

La direction de  $\mathcal{P}$  est  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ . C'est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de  $\mathbb{K}^3$  et c'est donc le noyau d'une forme linéaire  $\ell$ .

Le plan  $\mathcal{P}$  est alors l'ensemble des points de  $\mathbb{K}^3$  solutions de l'équation  $\ell(P) = \ell(M)$ .

#### EXERCICE 3.4

Donner une équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par les points  $M = (1, 0, 0)$ ,  $N_1 = (1, 2, 3)$  et  $N_2 = (2, 1, 1)$ .

## 4 Hyperplans affines dans un espace euclidien

On suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et que  $E$  est un espace euclidien.

**Vecteur normal à un hyperplan affine.** On considère  $\mathcal{H}$  un hyperplan affine de  $E$ , de direction  $H$ . Un *vecteur normal* à  $\mathcal{H}$  est par définition un vecteur normal à  $H$ , c'est-à-dire un vecteur non nul dans le sous-espace vectoriel  $H^\perp$  de dimension 1. On peut demander que ce vecteur normal soit *unitaire*, c'est-à-dire de norme 1. Il y a exactement deux vecteurs unitaires possibles ; si de plus  $E$  et  $H$  sont orientés, il y a un choix unique de vecteur normal unitaire à  $H$ , compatible avec les orientations.

**Équation d'un hyperplan affine.** On considère  $\mathcal{H}$  un hyperplan affine de  $E$ , de vecteur normal  $\vec{n}$  et passant par un point  $M$ .

#### PROPOSITION 4.1

L'hyperplan  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des points  $P$  vérifiant l'équation

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0.$$

*Démonstration.* Le point  $P$  est dans  $\mathcal{H}$  ssi le vecteur  $\overrightarrow{PM}$  est dans  $H$  ssi  $\overrightarrow{PM}$  est orthogonal à  $\vec{n}$ .  $\square$

#### EXERCICE 4.2

Dans  $\mathbb{R}^3$ , donner l'équation du plan affine passant par  $M = (1, 2, 3)$  et de vecteur normal  $\vec{n} = (-1, 1, 2)$ .

#### REMARQUE 4.3

Si un plan affine de  $\mathbb{R}^3$  est donné par une équation du type  $ax + by + cz + d = 0$ , un vecteur normal à ce plan est donné par  $\vec{n} = (a, b, c)$ .

**Distance à un hyperplan affine.** Si  $\mathcal{H}$  est un hyperplan affine de  $E$  et si  $P$  est un point de  $E$ , il existe un unique point  $M$  dans  $\mathcal{H}$  tel que

$$d(P, M) = \inf \{d(P, N) \mid N \in \mathcal{H}\}.$$

Ceci se déduit de l'énoncé analogue sur les sous-espaces vectoriels. Cette distance  $d(P, M)$  est la *distance de  $P$  à  $\mathcal{H}$*  et est notée  $d(P, \mathcal{H})$ .

#### PROPOSITION 4.4

Soit  $\vec{n}$  un vecteur unitaire normal à  $\mathcal{H}$  et soit  $M$  un point quelconque de  $\mathcal{H}$ . Alors,

$$d(P, \mathcal{H}) = |\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}|.$$

*Démonstration.* D'abord, on remarque que l'expression  $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}$  ne dépend pas du point  $M$  choisi dans  $\mathcal{H}$ . En effet, si  $M'$  est un autre point de  $\mathcal{H}$ , on a

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} - \overrightarrow{PM'} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M'M} \cdot \vec{n} = 0$$

car  $\overrightarrow{M'M}$  appartient à  $H$ , donc est orthogonal à  $\vec{n}$ .

De plus, l'unique point  $M$  de  $\mathcal{H}$  tel que  $d(P, M) = d(P, \mathcal{H})$  est tel que  $\overrightarrow{PM}$  est orthogonal à  $H$ . Donc, pour ce point  $M$ ,  $\overrightarrow{PM}$  est colinéaire à  $\vec{n}$  et

$$|\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{PM}\| = d(P, M) = d(P, \mathcal{H}).$$

$\square$

#### EXERCICE 4.5

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère le plan  $\mathcal{H}$  d'équation  $x + 2y + 3z = 1$ . Donner la distance de  $P = (1, 1, 1)$  à  $\mathcal{H}$ .