Logique et raisonnements

1 Logique, quantificateurs

EXERCICE 1. ♢ – ○○○ *Calcul propositionnel*
Soient P, Q et R des assertions. Montrer que les assertions suivantes sont vraies :

1. $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
2. $Q \implies (P \implies Q)$;
3. $(P \implies Q) \implies \big((P \wedge R) \implies (Q \wedge R)\big)$.

EXERCICE 2. ♢ – ○○○ *Quantificateurs et connecteurs*
Soit E un ensemble, soient $P(x)$ et $Q(x)$ des prédicats en la variable $x \in E$.
Déterminer en justifiant si les assertions suivantes sont vraies.

1. $\forall x \in E, \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \iff \big(\forall x \in E, P(x)\big) \wedge \big(\forall x \in E, Q(x)\big)$;
2. $\exists x \in E, \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \iff \big(\exists x \in E, P(x)\big) \wedge \big(\exists x \in E, Q(x)\big)$;
3. $\forall x \in E, \big(P(x) \vee Q(x)\big) \iff \big(\forall x \in E, P(x)\big) \vee \big(\forall x \in E, Q(x)\big)$;
4. $\exists x \in E, \big(P(x) \vee Q(x)\big) \iff \big(\exists x \in E, P(x)\big) \vee \big(\exists x \in E, Q(x)\big)$.

EXERCICE 3. ●○○ *Traduction formelle*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Traduire formellement les assertions suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante;
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule au moins une fois;
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule une infinité de fois;
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle;
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée;
6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

EXERCICE 4. ●○○ *Négation d'assertions*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Déterminer la signification des assertions suivantes, puis nier ces assertions :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$;
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$;
3. $\forall x, y \in I, (x \leq y) \implies \big(f(x) \leq f(y)\big)$;
4. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$.

EXERCICE 5. ●○○ *Fonction nulle part monotone*
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire une assertion mathématique traduisant le fait que f n'est monotone sur aucun segment $[a, b]$ non trivial.

EXERCICE 6. ●○○ *Polynômes et entiers*
Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Écrire une implication affirmant que si P est à coefficients entiers, alors sa valeur prise en un entier quelconque est un entier.
La réciproque de cette implication est-elle vraie ?

EXERCICE 7. ♣/♢ – ●●○ *Uniforme continuité*
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue si

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \epsilon.$$

On dit que f est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \epsilon.$$

1. Montrer qu'une fonction uniformément continue est continue.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

2 Modes de raisonnement

EXERCICE 8. ♢ – ○○○ *Un réel vraiment petit*
Soit x un réel positif. On suppose que $\forall \varepsilon > 0, x < \varepsilon$. Montrer que $x = 0$.

EXERCICE 9. ♣/♢ – ●○○ *Racines d'entiers*

1. Soit p un nombre premier, soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que $\sqrt[n]{p}$ est un nombre irrationnel.
2. Soit $n \geq 2$ un entier, qui n'est pas un carré parfait. Montrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel.

EXERCICE 10. ♣/♢ – ●●○ *Puissance d'irrationnels*
On considère le réel $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

1. Que vaut $x^{\sqrt{2}}$?
2. En déduire qu'on peut trouver deux nombres irrationnels α et β tels que α^{β} est rationnel.

EXERCICE 11. ●○○ *Une équation fonctionnelle*
On cherche à déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xf(x) + y^2 + f(xy) = f(x+y)^2 - f(x)f(y).$$

On procède par analyse synthèse.

1. Soit f une fonction solution.
   (a) Déterminer $f(0)$.
   (b) En déduire que $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(y)^2 = y^2$. Qu'en déduire sur f ?
   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.
2. Conclure.

EXERCICE 12. ♢ – ●○○ *Somme de fonctions paire et impaire*
Montrer que tout fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire d'une unique façon comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

EXERCICE 13. ♣– ●○○ *D'autres décompositions*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que f s'écrit de façon unique $f = g + c$, où $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue est telle que $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt = 0$ et où $c \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f s'écrit de façon unique $f = g + h$, où $h : x \mapsto \alpha x + \beta$ est une fonction affine et où $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue est telle que, $\forall a, b \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^1 (at + b)g(t)dt = 0$.

EXERCICE 14. ♣/♢– ●●○ *Principe des tiroirs*

1. On place 4 points sur un cercle de rayon 1.
   Montrer qu'on peut en sélectionner deux à distance inférieure ou égale à $\sqrt{2}$.
2. On place 51 points dans un carré plein de côté 1. Montrer qu'on peut en sélectionner trois tels que la distance entre deux de ces points est inférieure ou égale à $2/7$.
3. On considère $n + 1$ entiers compris entre 1 et $2n$.
   Montrer que l'un de ces entiers en divise un autre.
4. Retrouver le résultat de la question précédente par une récurrence.

3 Récurrences

EXERCICE 15. ○○○ *Inégalité de Bernoulli*
Soit $x \geq 0$ un réel. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

EXERCICE 16. ●○○ *Suite de Fibonacci*
On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 1}$ par récurrence :

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

1. Montrer que $\forall n \geq 2, \forall m \geq 1, F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.
2. Montrer que $\forall n \geq 2, F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2 \text{ et } F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1.$$

EXERCICE 17. ♢– ●○○ *Un drôle de raisonnement par récurrence*
Soit $\mathscr{P}(n)$ un prédicat portant sur un entier $n \geq 2$. On suppose :

— $\mathscr{P}(2)$;
— $\forall n \geq 2, \mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{P}(2) \implies \mathscr{P}(2n)$;
— $\forall n \geq 3, \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n-1)$.

Montrer que $\forall n \geq 2, \mathscr{P}(n)$.

EXERCICE 18. ♣/♢– ●●○ *Inégalité arithmético-géométrique*
En utilisant le mode de raisonnement par récurrence décrit dans l'exercice précédent, montrer que $\forall n \geq 2, \forall x_1, \ldots, x_n \geq 0, \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

EXERCICE 19. ♣ / ♢ – ●●○ *Théorème de Rédei sur les tournois*
Soit $n \geq 2$ un entier. Un tournoi oppose n équipes : chaque équipe affronte une fois chaque autre équipe et leur match désigne un vainqueur (il n'y a pas de match nul).
Montrer qu'on peut numéroter les équipes $E_1, \ldots, E_n$ de telle sorte que, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, l'équipe E_i ait battu l'équipe E_{i+1}.

4 Ensembles

EXERCICE 20. ○○○ *Notations ensemblistes*
Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Les assertions suivantes sont-elles correctes ?

1. $1 \in E$;
2. $1 \in \mathscr{P}(E)$;
3. $\{1\} \in \mathscr{P}(E)$;
4. $(1, 2) \in E$;
5. $(1, 2) \subset E$;
6. $\emptyset \in E$.

EXERCICE 21. ♢ – ○○○ *Inclusion de produits cartésiens*
Soient A, B, C trois ensembles. On suppose que $A \times B \subset B \times C$. Montrer que $A \subset C$.

EXERCICE 22. ♢ – ○○○ *Raisonnements ensemblistes*
Soit Ω un ensemble, soient A, B et C des parties de Ω. Montrer les assertions suivantes :

1. $A \cap B = A \cup B \iff A = B$;
2. $(A \cup B \subset A \cup C) \wedge (A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C$.

EXERCICE 23. ♣ / ♢ – ○○○ *Égalité d'ensembles*
On considère A et B des parties de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\right\} \text{ et } B = \left\{(t+1, 4t+3), t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Montrer que $A = B$.

EXERCICE 24. ♣ / ♢ – ●○○ *Union et intersection infinies*
Soient a et b deux réels tels que $b - a > 2$. Déterminer

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \text{ et } B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[.$$

EXERCICE 25. ♢ – ●◐○ *Différence symétrique*
Soit Ω un ensemble. Si $A, B \subset \Omega$, on appelle différence symétrique de A et B – que l'on note $A \Delta B$ – l'ensemble $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

1. Montrer que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.
2. Si A, B et C sont trois ensembles, identifier simplement l'ensemble $A \Delta (B \Delta C)$.
3. En déduire que Δ est associative : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(\Omega), A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
4. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(\Omega), A \Delta C = B \Delta C \iff A = B$.

EXERCICE 26. ♣ / ♢ – ●●○ *Des équations ensemblistes*
Soient Ω un ensemble, A et B des parties de Ω. Résoudre les équations

1. $A \cap X = B$; 2. $A \cup X = B$; 3. $A \cap X = B \cap X$,

où pour chaque équation, l'inconnue est $X \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Indications

Exercice 1. Utiliser des tables de vérité.

Exercice 2. Pour montrer qu'une assertion est fausse, on donne un contre-exemple.

Exercice 7. Pour 2., considérer par exemple $x \mapsto x^2$

Exercice 8. Par contraposée.

Exercice 9. On admettra les propriétés découlant du théorème fondamental de décomposition unique d'un entier en produit de facteurs premiers.

Exercice 10. Pour 2., on ne demande pas d'exhiber α et β

Exercice 12. Par analyse-synthèse. Bien écrite, l'analyse montre l'unicité.

Exercice 14. Pour 1., montrer qu'on peut trouver 3 points sur un même demi-cercle, puis 2 points sur un même quart de cercle. Pour 2., $51 = 2 \times 5^2 + 1$.

Exercice 17. On peut raisonner par une récurrence forte classique ou bien – ce qui revient au même – raisonner par l'absurde en considérant le plus petit $n \geq 2$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est faux.

Exercice 18. Pour $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n-1)$, on pourra poser $x_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$.

Exercice 19. Pour la récurrence, on peut se représenter n équipes ainsi numérotées sur une droite. Il s'agit alors de décider où placer la nouvelle équipe pour respecter la contrainte.

Exercice 21. Traduire l'hypothèse d'inclusion.

Exercice 22. Pour 2., considérer un $b \in B$ et distinguer selon qu'il appartient ou pas à A.

Exercice 23. Le premier ensemble est présenté par équations ; le deuxième par paramétrage. L'inclusion $B \subset A$ devrait être immédiate. Pour $A \subset B$, il faut trouver quel t convient.

Exercice 24. Par définition, A est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ appartenant à *au moins un* segment $\left[a + \dfrac{1}{n}, b - \dfrac{1}{n}\right]$; B est l'ensemble des x appartenant à *tous les* intervalles $\left]a - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n}\right[$. Si $x > a$, on admet qu'on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x > a + \dfrac{1}{n}$.

Exercice 25. Représenter trois ensembles A, B et C en position générale afin d'identifier $A\Delta(B\Delta C)$.

Exercice 26. Des dessins sont vivement recommandés. On raisonnera par analyse-synthèse : quelles conditions doit vérifier X pour satisfaire ces équations ? Puis, on montrera qu'elles sont suffisantes.