DM 1 - Modes de raisonnement

Exercice 1. – *Théorème de Zeckendorf*

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
Le but de l'exercice est de montrer le théorème de Zeckendorf :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier $N \in \mathbb{N}^*$ et des entiers uniques $k_1, \dots, k_N \geq 2$ tels que :

- $\forall i \in [\![1, N-1]\!], k_{i+1} \geq k_i + 2$;
- $n = F_{k_N} + F_{k_{N-1}} + \cdots + F_{k_1}$.

On appellera *décomposition de Zeckendorf* de n cette écriture.

1. Déterminer la décomposition de Zeckendorf de 17 et de 52.
2. Démontrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang $n = 2$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $k \geq 2$ tel que $F_k \leq n < F_{k+1}$.
4. Démontrer que tout entier n non nul admet une décomposition de Zeckendorf.
5. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,
$$F_{2n} - 1 = F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} \text{ et } F_{2n+1} - 1 = F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n}.$$
6. En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'unicité de la décomposition de Zeckendorf de n.

Exercice 2. – *Démonstration d'assertions formelles*

Pour chacune des assertions suivantes, expliciter sa signification, puis déterminer avec une démonstration si elle est vraie ou fausse.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} : ax^2 + bx + c = 0$ et $ay^2 + by + c = 0$.
2. $\forall s, p \in \mathbb{R}, \exists x, y \in \mathbb{R} : x + y = s$ et $xy = p$.
3. $\forall A > 0, \exists a, b > 0 : ab = A$ et $(\forall c, d > 0, cd = A \implies a + b \leq c + d)$.

Exercice 3. – *Une équation fonctionnelle*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.