# DM 2 - Inversion de Pascal, TFD et formule de Faulhaber

Exercices 1 et 2 obligatoires, puis au moins un parmi 3 et 4.

**Exercice 1.** – *Formule d'inversion de Pascal*

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres.
On définit sa *transformée binomiale* comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_k$.

1. Soient $0 \le k \le n$ des entiers naturels. Calculer, selon les valeurs de $k$ et de $n$, la quantité
$$\mu(k,n) = \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q}\binom{n-q}{k}.$$

2. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa transformée binomiale.
Montrer la formule d'inversion de Pascal :
$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} f_p.$$

**Exercice 2.** – *Nombre de dérangements*

Soit $E$ un ensemble. Une *permutation* de $E$ est une fonction $f : E \to E$ tel que tout élément de $E$ admet un unique antécédent par $f$ : $\forall y \in E, \exists! x \in E : f(x) = y$.
Une permutation de $E$ est un *dérangement* si elle est sans point fixe : $\forall x \in E, f(x) \neq x$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D_n$ le nombre de dérangements de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On convient que $D_0 = 1$.

1. On admet que $\forall n \ge 1, D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$. En déduire que $\forall n \ge 1, D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

2. On note $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la transformée binomiale de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Calculer les valeurs de $D_n$ et $T_n$ pour $n \in [\![0, 5]\!]$.

3. Conjecturer une formule pour $T_n$, puis la démontrer.

4. En déduire une formule pour $D_n$.

5. (Bonus) Si les $n$ passagers d'un avion s'assoient au hasard sur les $n$ sièges, quelle est la probabilité qu'aucun ne soit à la place indiquée sur son billet ? Pour $n = 500$, on réalisera en Python[1] une simulation de l'expérience et on comparera au résultat théorique.

[1] On pourra utiliser la méthode `shuffle` du module `random`.

**Exercice 3. –** *Transformation de Fourier discrète (TFD)*

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $E = \mathbb{C}^n$. Si $\mathbf{a}$ est un élément quelconque de $E$, on note $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ses $n$ composantes.
Soit $\mathbf{a}$ dans $E$. On définit $\mathscr{F}\mathbf{a} \in E$ sa *transformée de Fourier discrète* par

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!], (\mathscr{F}\mathbf{a})_j = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} a_k.$$

On définit aussi $\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a} \in E$ par $\forall j \in [\![0, n-1]\!], \left(\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a}\right)_j = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-kj} a_k$.
On pourra librement utiliser l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$ :

$$\forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.
2. En déduire que, pour tout $\mathbf{a} \in E$, $\mathscr{F}\left(\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a}\right) = \overline{\mathscr{F}}\left(\mathscr{F}\mathbf{a}\right) = n\mathbf{a}$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme, de coefficients $a_k \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$.
On note $M_P = \max\left\{|P(\omega^k)|, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

3. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!], |a_k| \leq M_P$.

Si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$, le *produit de convolution* de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, noté $\mathbf{a} \star \mathbf{b}$, est défini par

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], (\mathbf{a} \star \mathbf{b})_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{k-j},$$

les indices sur $\mathbf{b}$ étant à considérer modulo $n$ : $\forall i \in [\![1-n, -1]\!], b_{-i} = b_{n-i}$.

4. Montrer que $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \left(\mathscr{F}(\mathbf{a} \star \mathbf{b})\right)_k = (\mathscr{F}\mathbf{a})_k (\mathscr{F}\mathbf{b})_k$.
5. En déduire – en limitant les calculs – que $\star$ est commutative et associative :

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E, \mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{b} \star \mathbf{a} \text{ et } (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \star \mathbf{c} = \mathbf{a} \star (\mathbf{b} \star \mathbf{c}).$$

**Exercice 4. –** *Formule de Faulhaber*

La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli est définie de façon unique par $b_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0.$$

On utilise cette suite afin d'obtenir une expression polynomiale en $n$ de $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$.

1. Calculer $b_n$, pour $n \leq 4$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$.

3. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $S_{p+1}(n+1) = \displaystyle\sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} S_j(n)$.

4. En déduire la relation de récurrence suivante :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} - p! \sum_{j=0}^{p-1} \frac{S_j(n)}{j!(p+1-j)!}.$$

Pour tous entiers naturels $n$ et $p$, on définit $T_p(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k}$.

5. Montrer que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $T_p(n+1) - T_p(n) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{p} \sum_{j=0}^{\ell} b_{p-\ell} n^j \binom{p+1}{p-\ell} \binom{\ell+1}{j} = (p+1)n^p$.

   *Pour la deuxième égalité, on pourra réécrire le produit des coefficients binomiaux en un autre produit de coefficients binomiaux, dont un seul dépend de $\ell$.*

6. En déduire la *formule de Faulhaber* : $\forall n, p \in \mathbb{N}, S_p(n) = \dfrac{1}{p+1} T_p(n)$.

7. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$, si $n \in \mathbb{N}$ ?