DM 1 - Modes de raisonnement

Exercice 1. – *Décomposition de Zeckendorf*

1. On commence par calculer les termes de la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_2 = 1$; $F_3 = 2$; $F_4 = 3$; $F_5 = 5$; $F_6 = 8$; $F_7 = 13$; $F_8 = 21$; $F_9 = 34$.

   On trouve que $17 = 13+3+1 = F_7 + F_4 + F_2$ et $52 = 34+13+5 = F_9 + F_7 + F_5$.

2. Par une récurrence double immédiate, on montre que la suite de Fibonacci prend des valeurs entières positives. Alors, pour tout $n \geq 1$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geq 0$, donc la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   Comme $F_1 = 1$, on a donc : $\forall n \geq 1, F_n \geq 1$. On peut alors être plus précis. Soit $n \geq 2$. On a $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geq 1$. Donc, la suite $(F_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

3. Comme elle est à valeurs entières, on en déduit, par une récurrence simple immédiate, que :

$$\forall n \geq 2, F_n \geq n-1.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} \mid F_k \leq n\}$ est donc une partie finie de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus grand élément qu'on note k. Alors $F_k \leq n$ par définition et $F_{k+1} > n$ puisque $k+1 \notin A$. On a donc bien

$$F_k \leq n < F_{k+1}.$$

   De plus, k n'est pas égal à 0 ou 1 : sinon on aurait $F_{k+1} = 1$ et donc $n = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

4. On procède par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété de récurrence est l'existence d'une décomposition de Zeckendorf pour l'entier n.

   Initialisation : pour $n = 1$, on constate que $1 = F_2$ est une décomposition de Zeckendorf.

   Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ admette une décomposition de Zeckendorf. Par la question précédente, on peut trouver $k \geq 2$ tel que $F_k \leq n+1 < F_{k+1}$.

   Si on a égalité $n+1 = F_k$, c'est une décomposition de Zeckendorf de $n+1$. Sinon, on pose $m = (n+1) - F_k$. Comme $m \in [\![1, n]\!]$, il admet une décomposition de Zeckendorf (qu'on fixe une fois pour toutes). De plus, $m < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$, donc le plus grand terme dans la décomposition de Zeckendorf de m est au plus d'indice $k-2$. Ainsi, la décomposition de Zeckendorf de m, augmentée de F_k, est une décomposition de Zeckendorf de $n+1$.

   Ceci achève la récurrence : tout entier $n \geq 1$ admet une décomposition de Zeckendorf.

5. On va distinguer les n pairs et impairs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$F_{2n} - 1 = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n-1} F_k \text{ et } F_{2n+1} - 1 = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n} F_k.$$

   On montre que pour tout $n \geq 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, par récurrence sur n.

Initialisation : $F_2 - 1 = 0$, qui est bien égal à la somme vide et $F_3 - 1 = 2 - 1 = 1 = F_2$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$F_{2n+2} = F_{2n} + F_{2n+1} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n-1} F_k + F_{2n+1} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} F_k.$$

$$F_{2n+3} = F_{2n+1} + F_{2n+2} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n} F_k + F_{2n+2} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n+2} F_k.$$

Ceci montre bien $\mathscr{P}(n+1)$ et conclut la récurrence.

Or, la question revient à démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Ceci est donc démontré.

Remarque : on peut aussi utiliser une somme téléscopique. Par exemple :

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n} F_k = \sum_{i=1}^{n-1} F_{2i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} (F_{2i+2} - F_{2i}) = F_{2n} - F_2 = F_{2n} - 1.$$

6. On procède par récurrence forte, en notant, pour $n \geq 1$, $\mathscr{P}(n)$ la propriété stipulant l'unicité de la décomposition de Zeckendorf de n.

   Initialisation : comme pour tout $n \geq 3$, $F_n \geq 2$, seul F_2 peut apparaître dans une décomposition de Zeckendorf de 1. Donc $1 = F_2$ est la seule décomposition de Zeckendorf de 1.

   Hérédité : soit $n \geq 1$ un entier tel que $\mathscr{P}(k)$ est vrai pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Considérons deux décompositions de Zeckendorf de $n+1$:

$$n + 1 = \sum_{i=1}^{N} F_{k_i} = \sum_{j=1}^{M} F_{l_j},$$

   où $\forall i \in [\![1, N-1]\!], F_{k_{i+1}} \geq F_{k_i} + 2$ et $\forall j \in [\![1, M-1]\!], F_{l_{j+1}} \geq F_{l_j}$.

   Si on parvient à montrer que $k_N = l_M$, on pourra soustraire le terme $F_{k_N} = F_{l_M}$ à $n+1$ et obtenir deux décompositions de Zeckendorf de $n + 1 - F_{k_N}$. L'hypothèse de récurrence permettra alors de conclure.

   Tout revient donc à montrer que $k_N = l_M$. Supposons par l'absurde qu'ils soient distincts. Par symétrie, on peut supposer que $k_N > l_M$ et donc $F_{k_N} \geq F_{l_M+1}$. Considérons la somme $\sum_{j=1}^{M} F_{l_j}$. Comme deux indices successifs de cette somme ne sont pas consécutifs et comme la suite de Fibonacci est croissante, on en déduit $F_{l_{M-1}} \leq F_{l_M - 2}$, puis $F_{l_{M-2}} \leq F_{l_M - 4}$, etc. Par une récurrence finie immédiate, on a :

$$\forall j \in [\![1, M-1]\!], F_{l_{M-j}} \leq F_{l_M - 2j}.$$

   Ainsi, $\sum_{j=1}^{M} F_{l_j} \leq \sum_{j=0}^{M-1} F_{l_M - 2j}$. Or, cette dernière somme est inférieure à

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k \equiv l_M [2]}}^{l_M} F_k = F_{l_M+1} - 1,$$

d'après la question précédente. D'où les inégalités :

$$F_{l_M+1} \leq F_{k_N} \leq \sum_{i=1}^{N} F_{k_i} = \sum_{j=1}^{M} F_{l_j} \leq F_{l_M+1} - 1.$$

C'est absurde.

Ceci conclut la récurrence : tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ admet donc une unique décomposition de Zeckendorf (l'existence a été prouvée précédemment).

Exercice 2. – *Démonstration d'assertions formelles*

Pour chacune des assertions suivantes, expliciter sa signification, puis déterminer avec une démonstration si elle est vraie ou fausse.

1. On affirme que deux réels quelconques sont toujours racines d'un même polynôme de degré 2 à coefficients réels. C'est vrai. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On définit $P = (X-x)(X-y) = X^2 - (x+y)X + xy$. Alors, par construction, x et y sont racines de P ; ainsi, en posant $a = 1$, $b = -(x+y)$ et $c = xy$, on a bien $ax^2 + bx + c = ay^2 + by + c = 0$.

2. On affirme qu'étant donnés deux réels s et p, on peut trouver deux réels x et y de somme s et de produit p. C'est faux. Posons en effet $s = 0$ et $p = 1$. Si x et y réels sont tels que $x + y = s$, alors $x = -y$ et donc $xy = -x^2 \leq 0$ ne peut pas valoir p.
Cependant, la propriété est vraie en acceptant les x et y réels. Prendre pour x et y les racines de $X^2 - sX + p$.

3. On affirme qu'étant donnée une aire $A > 0$, on peut trouver un rectangle ayant cette aire et dont le périmètre est minimal parmi les rectangles ayant cette aire. En effet, si a et b sont les longueurs des côtés d'un rectangle, l'aire du rectangle vaut ab et son demi-périmètre $a + b$. C'est vrai.
Soit $A > 0$. On pose $a = b = \sqrt{A}$. Alors, $ab = A$. De plus, soient $c, d > 0$ tels que $cd = A$. On doit montrer que $a+b \leq c+d$. Or, $a+b = 2\sqrt{A}$ et $c+d = c+\dfrac{A}{c} \geq 2\sqrt{c}\sqrt{\dfrac{A}{c}} = 2\sqrt{A}$, par inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 3. – *Une équation fonctionnelle*

On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Soit f une telle fonction. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part, $f(x) + xf(1-x) = 1 + x$. D'autre part, en substituant $1-x$ à x dans l'hypothèse : $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2 - x$. En retranchant x fois la deuxième égalité à la première :

$$f(x) - x(1-x)f(x) = 1 + x - x(2-x),$$

  d'où $f(x)(1-x+x^2) = 1-x+x^2$. Comme $1-x+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a donc $f(x) = 1$.
  Synthèse. On pose f la fonction constante égale à 1. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)+xf(1-x) = 1 + x$.
  Conclusion. Seule la fonction constante égale à 1 est solution de l'équation fonctionnelle.