

Calculs algébriques

1 Sommes et produits

EXERCICE 1. ○○○ Sommes et produits élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a \in \mathbb{R}$. Simplifier les sommes et produits suivants :

1. $\sum_{k=1}^n 4^{2k+3};$

3. $\sum_{k=n}^{2n} a;$

5. $\prod_{k=0}^n a^k;$

2. $\sum_{k=0}^n e^{ak};$

4. $\sum_{k=1}^n (-1)^k k;$

6. $\prod_{k=1}^n \frac{1}{k+3}.$

EXERCICE 2. ◇-○○○ Téléscoptes

Soit $n \geq 2$ un entier. Simplifier :

1. $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right);$

2. $\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+3};$

3. $\sum_{k=1}^n k \times k!;$

4. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$

EXERCICE 3. ●○○ Autres téléscoptes

1. Calculer, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}.$

2. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ est strictement croissante.

EXERCICE 4. ♣-●○○ Sommes doubles

Calculer :

1. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j);$

3. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j);$

5. $\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ |i-j|=1}} ij;$

2. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j};$

4. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij;$

6. $\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i+j=n}} ij.$

EXERCICE 5. ◇-●○○ Un produit

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier le produit $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}).$

EXERCICE 6. ◇-●○○ Terme général d'une suite

Déterminer les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = n.$

EXERCICE 7. ●○○ Série harmonique

Pour tout $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq 1/2$.
2. En déduire une minoration de H_{2n} .
3. En déduire que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ diverge.

EXERCICE 8. ♣-●○○ Décomposition en somme de factorielles

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 0, (p+1)! - 1 \rrbracket$, il existe un unique $(n_0, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, 0 \leq n_k \leq k \text{ et } n = \sum_{k=0}^p n_k k!$$

EXERCICE 9. ♣/◇-●○○ Une inégalité de Tchebychev

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels. On note

$$S = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j), \quad s_1 = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k, \quad s_2 = \sum_{1 \leq k \leq n} b_k, \quad s_3 = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k b_k.$$

1. Exprimer S en fonction de s_1, s_2 et s_3 .
2. En déduire que si $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$, alors

$$\left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_k \right) \left(\sum_{1 \leq k \leq n} b_k \right) \leq n \sum_{1 \leq k \leq n} a_k b_k.$$

EXERCICE 10. ♣/◇-●●○ Formule d'al-Haytham

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on pose $S_n^{(p)} = \sum_{k=0}^n k^p$.

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. En simplifiant de deux façons différentes la somme $\sum_{0 \leq i < j \leq n} i^p$, montrer la

$$\text{formule d'al-Haytham : } nS_n^{(p)} - S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(p)}.$$

2. En déduire une formule pour $S_n^{(4)}$.

2 Coefficients binomiaux

EXERCICE 11. ◇-●○○ Un coefficient binomial sur deux

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k}$ et $I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}$.

Calculer P_n et I_n .

EXERCICE 12. ◇-●○○ Somme des coefficients binomiaux sur une colonne

Soient $k, p \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq p$. Montrer que $\sum_{m=0}^p \binom{m}{k} = \binom{p+1}{k+1}$.

EXERCICE 13. $\diamond - \bullet \circ \circ$ Somme des $k \binom{n}{k}$

Soit $n \geq 1$ un entier. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

EXERCICE 14. $\bullet \circ \circ$ Encore des identités avec les coefficients binomiaux!

1. Soient $m, r, k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$. Que donne le cas particulier $k = 1$?

2. Soient $r, n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$.

3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq m$. En utilisant les deux questions précédentes, simplifier $\sum_{k=0}^m \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$.

EXERCICE 15. $\clubsuit / \diamond - \bullet \bullet \circ$ Formule du multinôme

Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 + \dots + k_m = n$. Le coefficient multinomial $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$

est défini par $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$.

Soient x_1, \dots, x_m des réels. Montrer la formule du multinôme :

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{0 \leq k_1, k_2, \dots, k_m \leq n \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

3 Suites arithmético-géométriques

EXERCICE 16. $\clubsuit - \circ \circ \circ$ Suites arithmético-géométriques

1. Déterminer le terme général de la suite (u_n) vérifiant $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4$.

2. Déterminer toutes les suites (v_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n + 1)$.

EXERCICE 17. $\diamond - \bullet \circ \circ$ Suite homographique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

2. On définit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

Déterminer l'expression du terme général de (v_n) .

3. En déduire la limite de (v_n) , puis la limite de (u_n) .

Indications

Exercice 2. Pour le 4., déterminer trois réels a , b et c tels que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$, pour tout k .

Exercice 5. Considérer $(1-a)P_n$.

Exercice 6. Quand on connaît les accroissements d'une suite, on connaît la suite.

Exercice 9. Pour simplifier les calculs, exprimer S comme une somme carrée plutôt que triangulaire.

Exercice 10. Pour le calcul final de $S_n^{(4)}$, on pourra utiliser un logiciel de calcul formel.

Exercice 11. Considérer $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$. Pour calculer $P_n - I_n$, rassembler les deux sommes.

Exercice 12. On peut faire apparaître un télescopage.

Exercice 13. Utiliser la formule du chef.

Exercice 15. Par récurrence sur m .

Exercice 17. Déterminer une relation de récurrence sur (v_n) .