2 - Nombres réels

Jeremy Daniel

1 Calcul sur les réels

1.1 Inégalités

Proposition 1.1 (Inégalités et somme)
Soient x, y, z, t des nombres réels.
- *Si $x \leq z$ et $y \leq t$, alors $x + y \leq z + t$;*
- *Si $x \leq z$ et $y \geq t$, alors $x - y \leq z - t$.*

Remarque 1.2
Par récurrence, on en déduit que si I est un ensemble fini et si, pour tout $i \in I$, on dispose de réels x_i et y_i tels que $x_i \leq y_i$, alors

$$\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i.$$

Proposition 1.3 (Inégalités et produit)
Soient x, y, z, t des nombres réels positifs.
- *Si $x \leq z$ et $y \leq t$, alors $xy \leq zt$;*
- *Si $x \leq z$ et $y \geq t > 0$, alors $\frac{x}{y} \leq \frac{z}{t}$.*

Remarque 1.4
Comme précédemment, si on dispose de réels positifs $x_i \leq y_i$, alors

$$\prod_{i \in I} x_i \leq \prod_{i \in I} y_i.$$

Proposition 1.5 (Inégalité arithmético-géométrique)
On dispose des inégalités suivantes entre nombres réels :
- *Si $x, y \geq 0$, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ avec égalité ssi $x = y$;*
- *Si $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ avec égalité ssi $x = y$;*
- *Si $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ avec égalité ssi $x = 1$.*

Théorème 1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres réels. On a l'inégalité :

$$\sum_{i\in I} a_i b_i \leq \Big(\sum_{i\in I} a_i^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i\in I} b_i^2\Big)^{1/2},$$

avec égalité ssi
- *ou bien tous les a_i sont nuls.*
- *ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+ : \forall i \in I, b_i = \lambda a_i$.*

1.2 Valeur absolue

Définition 1.7 (Valeur absolue)
Soit x un réel. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition 1.8 (Autre définition)
Pour tout réel x, $|x| = \sqrt{x^2}$.

Théorème 1.9 (Inégalité triangulaire)
Soient x, y des nombres réels.

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

avec égalité ssi x et y ont le même signe.

Théorème 1.10 (Inégalité triangulaire inversée)
Soient x, y des nombres réels.

$$|x+y| \geq \Big||x| - |y|\Big|.$$

Remarque 1.11
En pratique, on sait le plus souvent qui de x et de y est le plus grand *en valeur absolue.* Si $|x| \geq |y|$, on a ainsi : $|x+y| \geq |x| - |y|$.
En toutes lettres : la valeur absolue d'une somme de deux nombres est supérieure ou égale à la différence des valeurs absolue des deux nombres.

Proposition 1.12 (Valeur absolue et maximum/minimum)
Soient x, y des nombres réels.
- $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$;
- $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

1.3 Partie entière

Définition 1.13 (Partie entière)
Soit x un réel. La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x$.

Attention !
On ne confondra pas cette notation avec celle de la valeur absolue.

Proposition 1.14 (Caractérisation)
$\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.

Définition 1.15 (Partie entière supérieure, partie fractionnaire - HP)
Soit x un réel.
- La partie entière supérieure de x, notée $\lceil x \rceil$, est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n-1 < x \leq n$.
- La partie fractionnaire de x, notée $\{x\}$, est définie par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Proposition 1.16
Soit x un réel, soit n un entier.
- $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
- $\{x+n\} = \{x\}$
- $\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$

Exemples 1.17
- $\lfloor \pi \rfloor = 3$; $\lceil \pi \rceil = 4$; $\{\pi\} = 0,1415926535...$
- $\lfloor 2 \rfloor = \lceil 2 \rceil = 2$; $\{2\} = 0$
- $\lfloor -1,4 \rfloor = -2$; $\lceil -1,4 \rceil = -1$; $\{-1,4\} = 0,6$

2 Propriétés des réels

2.1 Parties convexes et intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 2.1 (Partie convexe de $\mathbb{R}$)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est convexe si

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1], (1-t)x + ty \in A.$$

Remarque 2.2
Comme l'ensemble $\{(1-t)x + ty, t \in [0,1]\}$ est simplement le segment $[x,y]$ (ou $[y,x]$ si $y < x$), cela revient à demander :

$$\forall x, y \in A, (x < y) \implies [x,y] \subset A.$$

Théorème 2.3 (Les parties convexes sont les intervalles)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est convexe ssi c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.2 Parties denses de $\mathbb{R}$

Définition 2.4 (Partie dense de $\mathbb{R}$)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x < y) \implies \big(A \cap]x, y[\neq \emptyset\big)$.

Remarque 2.5
Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dira que A est dense dans I si

$$\forall x, y \in I, (x < y) \implies (A \cap]x, y[\neq \emptyset).$$

Théorème 2.6 ($\mathbb{R}$ est archimédien - HP)
Soient x et y deux réels, avec $x > 0$. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Corollaire 2.7 ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont des parties denses)
Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont tous deux denses dans $\mathbb{R}$.

2.3 Propriété de la borne supérieure

Définition 2.8 (Majorant)
Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est un majorant de A si

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

On dit que A est une partie majorée si elle admet un majorant.

Définition 2.9 (Maximum)
Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est le maximum de A si $M \in A$ et si M est un majorant de A.

Exemple 2.10
Les intervalles $[0, 1]$ et $[0, 1[$ sont tous deux majorés par 1 ; 1 est le maximum de $[0, 1]$ tandis que $[0, 1[$ n'a pas de maximum.

Définition 2.11 (Borne supérieure)
Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est la borne supérieure de A si
- M est un majorant de A.
- Il n'existe pas de majorant de A strictement inférieur à M.

Proposition 2.12 (Caractérisation de la borne supérieure)
Avec les notations précédentes, M est la borne supérieure de A ssi

- $\forall x \in A, x \leq M$;
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x \geq M - \varepsilon$.

Théorème 2.13 (Propriété de la borne supérieure)
Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Remarque 2.14
En prenant les inégalités opposées, on définit de même les notions de minorant, minimum et borne inférieure. Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.