Nombres réels et inégalités

1 Valeur absolue et partie entière

EXERCICE 1. ♢ – ●○○ *Incertitudes sur la somme et le produit*
On approche n réels $x_1, \dots, x_n$ par des réels $\xi_1, \dots, \xi_n$.

1. Majorer l'erreur commise en approchant $x_1 + \cdots + x_n$ par $\xi_1 + \cdots + \xi_n$, en fonction des erreurs $\varepsilon_i = |x_i - \xi_i|$.
2. Même question avec le produit, la majoration dépendant aussi des x_i.

EXERCICE 2. ♢ – ●○○ *(In)équations avec valeurs absolues*
Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $|x-7| = |4x-1|$;
2. $|x-7| = 4x-1$;
3. $|3x+1| > |x+2|$;
4. $|2x-4| = |x+3|$;
5. $|x^2-2| \leq 2x+1$;
6. $|x-2| + |3x+1| < 4$.

EXERCICE 3. ♢ – ●○○ *Variations sur l'inégalité triangulaire*
Soient x et y deux réels. Montrer que

1. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$;
2. $1 + |xy-1| \leq \big(1+|x-1|\big)\big(1+|y-1|\big)$.

EXERCICE 4. ●○○ *Équations avec parties entières*
Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$;
2. $\lfloor x + \sqrt{2} \rfloor - \lfloor x \rfloor = 2$.

EXERCICE 5. ●○○ *Parité d'une partie entière*
Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.
2. En déduire que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ est un entier impair.

EXERCICE 6. ♣/♢ – ●●○ *Une autre équation avec parties entières*
Résoudre sur $\mathbb{R}$, $\lfloor 3x-2 \rfloor = \lfloor 2x+1 \rfloor$.

EXERCICE 7. ♣ – ●●○ *Deux identités avec la partie entière*

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$;
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

EXERCICE 8. ♢ – ●●○ *Somme de parties entières*
Soit x un réel, soit $m \geq 1$ un entier. Montrer que $\lfloor mx \rfloor = \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor x + \frac{k}{m} \right\rfloor$.

2 Inégalités sur les réels

EXERCICE 9. ●○○ *Somme et somme des inverses*
Soeint $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2$;

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ;
2. En développant et regroupant astucieusement les termes.

EXERCICE 10. ♣/♢ – ●◐○ *Lemme de Titu*

1. Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des réels strictement positifs. Montrer que
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2}.$$
2. En déduire plus généralement le lemme de Titu : si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des réels strictement positifs, alors
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + \cdots + b_n}.$$
3. Retrouver ce résultat par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

EXERCICE 11. ♢ – ●◐○ *Une inégalité avec des puissances*
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

EXERCICE 12. ♣/♢ – ●●○ *Inégalités de Nesbitt et Shapiro*

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que $3(ab + ac + bc) \leq (a + b + c)^2$.
   (b) Déduire l'inégalité de Nesbitt du lemme de Titu :
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$
2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que $2\Big(a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)\Big) \leq (a+b+c+d)^2$.
   (b) Déduire l'inégalité suivante de Shapiro du lemme de Titu :
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

EXERCICE 13. ♣/♢ – ●●○ *Une majoration de* $\prod(1+a_k)$
Soient $a_1,\dots,a_n > -1$ des nombres réels tels que $S = \sum_{k=1}^{n} a_k \geq 0$. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{S^i}{i!}$.

EXERCICE 14. ♣ – ●●◐ $\sum a_k$ *et* $\sum \varepsilon_k a_k$
Soient $a_1,\dots,a_n$ des nombres réels.

1. Montrer qu'il existe $m \in [\![0,n]\!]$ tel que $\left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \max_{1\leq k\leq n} |a_k|$.
2. Montrer que $\max_{1\leq k\leq n} |a_k| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm 1} \left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\right|$.

3 Borne supérieure, densité, intervalles de $\mathbb{R}$

EXERCICE 15. ●○○ *Borne supérieure, borne inférieure*
Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants. Préciser si les bornes sont atteintes.

1. $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
2. $B = \left\{\left|\frac{\cos n}{n}\right|, n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
3. $C = \left\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$;
4. $D = \left\{\frac{nm}{n^2+m^2+1}, (n,m) \in \mathbb{N}^2\right\}$.

EXERCICE 16. ♣ – ●○○ *Somme et produit de parties denses*
Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties, avec A dense dans $\mathbb{R}$ et B non vide.

1. Montrer que $A+B = \{a+b, (a,b) \in A\times B\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. A quelle condition sur B, $AB = \{ab, (a,b) \in A\times B\}$ est-elle dense dans $\mathbb{R}$?

EXERCICE 17. ♢ – ●●○ *Densité des* $\sqrt{n} - \sqrt{m}$

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de limite $+\infty$ telles que $\lim_n (u_{n+1}-u_n) = 0$ et $\lim_n (v_{n+1}-v_n) = 0$. Montrer que $\left\{u_n - v_m, (n,m) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\left\{\sqrt{n} - \sqrt{m}, (n,m) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 18. ♣/♢ – ●●○ *Densité de* $\cos(\ln n)$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\left\{\cos(\ln n), n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 19. ♣/♢ – ●◐○ *Théorème des chipolatas*
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \cap I_{n+1} \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Indications

Exercice 1. Pour le produit, passer de $x_1 \dots x_n$ à $\xi_1 \dots \xi_n$ en n étapes.

Exercice 2. On pourra dans certains cas faire un tableau donnant les signes des quantités pertinentes en fonction de x.

Exercice 3. Pour 2., réécrire les quantités en fonction de $x-1$ et $y-1$.

Exercice 6. Commencer par montrer qu'il suffit de considérer les x appartenant à un intervalle de longueur finie. Puis, faire un tableau résumant les valeurs prises par les deux membres.

Exercice 8. Faire une disjonction de cas selon la partie fractionnaire de x.

Exercice 10. Pour 3., définir x_i et y_i de sorte que $\dfrac{a_i^2}{b_i} = x_i^2$ et $a_i = x_i y_i$.

Exercice 11. Se ramener à une seule variable réelle.

Exercice 12. Pour les questions (b), les fractions du type $\dfrac{a}{b+c}$ ne sont pas encore écrites sous la bonne forme pour appliquer le lemme de Titu.

Exercice 13. Penser à l'inégalité arithmético-géométrique.

Solution. Par inégalité arithmético-géométrique, on a $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1+a_k}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{S}{n}\right)^n$. Or,

$$\left(1+\frac{S}{n}\right)^n = \sum_{k=0} n\binom{n}{k}\frac{S^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{S^k}{k!}.$$

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \leq 1$ car chacun des k facteurs au numérateur est inférieur à n. L'inégalité annoncée s'ensuit.

Exercice 17. Les hypothèses sur (u_n) se traduisent en

- $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \geq A$;
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.

De même pour (v_n). Les u_n sont arbitrairement grands mais de plus en plus resserrés ; de même pour les v_m. Exploiter cela.

Exercice 18. Utiliser la périodicité de cos et le fait que les valeurs $\ln n$ sont de plus en plus grandes et de plus en plus resserrées.

Exercice 19. Le montrer pour deux intervalles, puis pour un nombre fini, puis passer à l'infini. La caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ peut aider.