DM 2 - Inversion de Pascal, TFD et formule de Faulhaber – Corrigé

1 Formule d'inversion de Pascal

1. Soit $q \in [\![0, n-k]\!]$. On remarque que
$$\binom{n}{q}\binom{n-q}{k} = \frac{n!}{q!(n-q)!}\frac{(n-q)!}{k!(n-q-k)!} = \frac{n!}{q!k!(n-q-k)!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{q}.$$
Ainsi,
$$\mu(k,n) = \sum_{q=0}^{n-k}(-1)^q\binom{n}{k}\binom{n-k}{q} = \binom{n}{k}(1+(-1))^{n-k}$$
par la formule du binôme de Newton.
On conclut que $\mu(k,n) = 0$ si $n > k$ et 1 si $n = k$.

2. On calcule le terme de droite.
$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}f_p &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}e_k\\ &= \sum_{k=0}^{n}e_k\sum_{p=k}^{n}(-1)^{n-p}\binom{p}{k}\binom{n}{p}\\ &= \sum_{k=0}^{n}e_k\sum_{q=0}^{n-k}(-1)^q\binom{n-q}{k}\binom{n}{n-q}\\ &= \sum_{k=0}^{n}e_k\sum_{q=0}^{n-k}(-1)^q\binom{n-q}{k}\binom{n}{q}\\ &= \sum_{k=0}^{n}e_k\times\mu(k,n)\\ \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}f_p &= e_n.\end{aligned}$$
Pour le passage de la deuxième à la troisième ligne, on a fait le changement de variable $q = n-p$; pour le passage de la troisième à la quatrième, on a utilisé la formule de symétrie. On a bien montré :
$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}f_p.$$

2 Nombre de dérangements

1. Soit $n \geq 1$. On calcule :
$$(D_n - nD_{n-1}) + (D_{n+1} - (n+1)D_n) = D_{n+1} - n(D_n + D_{n-1}) = 0.$$

En posant, pour tout $n \geq 1$, $E_n = D_n - nD_{n-1}$, on en déduit donc que $\forall n \geq 1, E_n = -E_{n+1}$ et donc, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, E_n = (-1)^{n-1} E_1$.

Or, $E_1 = D_1 - D_0 = 0 - 1 = -1$ ($D_1 = 0$, car il n'y a pas de dérangement pour le singleton $\{1\}$). D'où,

$$\forall n \geq 1, E_n = (-1)^n,$$

c'est-à-dire $\forall n \geq 1, D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

2. En utilisant l'une ou l'autre des formules précédentes, on trouve

   - $D_0 = 1$
   - $D_1 = 0$
   - $D_2 = 1$
   - $D_3 = 2$
   - $D_4 = 9$
   - $D_5 = 44$

   Le calcul de T_n, pour $n \leq 5$ donne alors :

   - $T_0 = 1$
   - $T_1 = 1$
   - $T_2 = 2$
   - $T_3 = 6$
   - $T_4 = 24$
   - $T_5 = 120$

3. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = n!$. Montrons le en établissant une formule de récurrence pour $(T_n)_n$. Soit $n \geq 1$. On calcule :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k \\ &= \binom{n}{0} D_0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (kD_{k-1} + (-1)^k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} D_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

   La somme de droite vaut -1 car $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$ par la formule du binôme de Newton. Donc :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} D_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} D_{k-1} \\ &= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} D_\ell \\ T_n &= nT_{n-1}. \end{aligned}$$

   On a utilisé la formule du chef pour le passage de la première à la deuxième ligne, puis on a fait un changement de variable $\ell = k - 1$.

   Comme par ailleurs $T_0 = 1$, une récurrence immédiate permet de conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = n!$$

4. En utilisant la formule d'inversion de Pascal, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p!$$

Or, $\binom{n}{p} p! = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. En utilisant le changement de variable $k = n - p$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

5. Il y a $n!$ permutations pour l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Le problème revient à choisir une permutation aléatoire de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et à considérer la probabilité qu'il s'agisse d'un dérangement. La probabilité recherchée est donc :

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Consulter le fichier .py pour le code. Pour $n = 500$, la probabilité vaut environ 0.3679.

Remarque : on montrera que $\dfrac{D_n}{n!}$ converge (très vite) vers $1/e$.

3 Transformation de Fourier discrète

1. On commence par remarquer que $\omega^p = e^{\frac{2ip\pi}{n}}$. Ceci est égal à 1 ssi $\dfrac{p}{n}$ est un entier, c'est-à-dire si n divise p. Ainsi, si n divise p, $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$.
   Supposons maintenant que n ne divise pas p. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^p\right)^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0.$$

   Bilan : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut n si n divise p et 0 sinon.

2. Soit $\mathbf{a} \in E$. On souhaite calculer $\mathbf{b} = \mathscr{F}\left(\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a}\right)$. Soit $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_j &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \left(\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a}\right)_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^{-\ell k} a_\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(j-\ell)}\right) a_\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} n\delta_{j,\ell} a_\ell \\
\mathbf{b}_j &= n a_j.
\end{aligned}$$

On a noté $\delta_{j,\ell}$ la quantité valant 1 si $j = \ell$ et 0 sinon. On a utilisé la question précédente et le fait que, comme $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, n divise $j - \ell$ ssi $j = \ell$.
D'où l'égalité $\mathscr{F}\left(\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a}\right) = n\mathbf{a}$. L'autre égalité est analogue.

3. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Avec les notations précédentes, en notant $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, on a $P(\omega^k) = (\mathscr{F}\mathbf{a})_k$.
Par la formule $n\mathbf{a} = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\mathbf{a}$, on en déduit :
$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-kj} P(\omega^j).$$
Par inégalité triangulaire :
$$|a_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |\omega^{-kj} P(\omega^j)| = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |P(\omega^j)| \leq \frac{1}{n} \times nM_P = M_P.$$

4. Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans E. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a :
$$\begin{aligned}
\left(\mathscr{F}(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\right)_k &= \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} (\mathbf{a}\star\mathbf{b})_j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{a}_\ell \mathbf{b}_{j-\ell} \quad \text{en considérant les indices sur } \mathbf{b} \text{ modulo } n \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{a}_l \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} \mathbf{b}_{j-\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{a}_\ell \omega^{\ell k} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{(j-\ell)k} \mathbf{b}_{j-\ell} \quad \text{car } \omega^{jk} = \omega^{\ell k} \times \omega^{(j-\ell)k} \\
&= \Big(\sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{a}_\ell \omega^{\ell k}\Big)\Big(\sum_{j'=-\ell}^{n-1-\ell} \omega^{j'k} \mathbf{b}_{j'}\Big) \quad \text{par changement de variable } j' = j - \ell \\
\left(\mathscr{F}(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\right)_k &= \left(\mathscr{F}\mathbf{a}\right)_k \left(\mathscr{F}\mathbf{b}\right)_k.
\end{aligned}$$
Pour justifier la dernière étape, il faut se convaincre de l'égalité
$$\sum_{j'=-\ell}^{n-1-\ell} \omega^{j'k} \mathbf{b}_{j'} = \left(\mathscr{F}\mathbf{b}\right)_k.$$
Cela provient de l'invariance de la quantité $\omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'}$ quand on translate l'indice j' de n. Plus

précisément :

$$\begin{aligned}
\sum_{j'=-\ell}^{n-1-\ell} \omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} &= \sum_{j'=-\ell}^{-1} \omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} + \sum_{j'=0}^{n-1-\ell} \omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} \\
&= \sum_{j'=0}^{n-1-\ell} \omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} + \sum_{j=n-\ell}^{n-1} \omega^{(j-n)k}\mathbf{b}_{j-n} \quad \text{par changement de variable } j = j'+n \\
&= \sum_{j'=0}^{n-1-\ell} \omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} + \sum_{j=n-\ell}^{n-1} \omega^{jk}\mathbf{b}_{j} \quad \text{car } \omega^{nk} = 1 \text{ et } \mathbf{b}_{j-n} = \mathbf{b}_j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk}\mathbf{b}_j \\
&= \left(\mathscr{F}\mathbf{b}\right)_k.
\end{aligned}$$

5. Soient $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in E$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\left(\mathscr{F}(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\right)_k = \left(\mathscr{F}\mathbf{a}\right)_k\left(\mathscr{F}\mathbf{b}\right)_k = \left(\mathscr{F}\mathbf{b}\right)_k\left(\mathscr{F}\mathbf{a}\right)_k = \left(\mathscr{F}(\mathbf{b}\star\mathbf{a})\right)_k.$$

En appliquant $\overline{\mathscr{F}}$ aux deux membres, on a donc :

$$n\,\mathbf{a}\star\mathbf{b} = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}(\mathbf{a}\star\mathbf{b}) = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}(\mathbf{b}\star\mathbf{a}) = n\,\mathbf{b}\star\mathbf{a},$$

d'où la commutativité de $\star$.
De même, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\left(\mathscr{F}\left((\mathbf{a}\star\mathbf{b})\mathbf{c}\right)\right)_k = \left(\mathscr{F}(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\right)_k\left(\mathscr{F}\mathbf{c}\right)_k = \left(\mathscr{F}\mathbf{a}\right)_k\left(\mathscr{F}\mathbf{b}\right)_k\left(\mathscr{F}\mathbf{c}\right)_k.$$

Le calcul de $\left(\mathscr{F}\left(\mathbf{a}\star(\mathbf{b}\star\mathbf{c})\right)\right)_k$ donne la même chose. En appliquant $\overline{\mathscr{F}}$ aux deux membres et en divisant par n, on obtient $(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\star\mathbf{c} = \mathbf{a}\star(\mathbf{b}\star\mathbf{c})$. D'où l'associativité de $\star$.

4 Formule de Faulhaber

1. On trouve (*calculs à écrire, bien sûr*) $b_0 = 1$, $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{6}$, $b_3 = 0$ et $b_4 = -\dfrac{1}{30}$.

2. Soit $n \geq 2$. On fait le changement de variable $\ell = n-k$ dans la relation définissant les nombres de Bernoulli (avec l'indice $n-1$) et on utilise la symétrie des coefficients binomiaux.

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k = \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{n-\ell}b_{n-\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}b_{n-\ell}.$$

3. Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} S_j(n) &= \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} \sum_{k=0}^{n-1} k^j \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j \quad \text{par interversion des sommes} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{p+1} \quad \text{par la formule du binôme de Newton} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \ell^{p+1}
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} S_j(n) = S_{p+1}(n+1) \quad \text{car le terme d'indice } \ell = 0 \text{ est nul.}$$

4. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Par la question précédente,

$$S_{p+1}(n+1) = \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} S_j(n) = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) + (p+1) S_p(n) + S_{p+1}(n).$$

Or, $S_{p+1}(n+1) = S_{p+1}(n) + n^{p+1}$. On en déduit :

$$(p+1) S_p(n) = n^{p+1} - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) = n^{p+1} - (p+1)! \sum_{j=0}^{p-1} \frac{S_j(n)}{j!(p+1-j)!}.$$

La formule s'en déduit en divisant par $p+1$.

5. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
T_p(n+1) - T_p(n) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} b_k \Big((n+1)^{p+1-k} - n^{p+1-k} \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} b_k \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p+1-k}{j} n^j \quad \text{par la formule du binôme de Newton} \\
&= \sum_{\ell=0}^{p} \sum_{j=0}^{\ell} b_{p-\ell} n^j \binom{p+1}{p-\ell} \binom{\ell+1}{j} \quad \text{par changement de variable } k = p - \ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{p} \sum_{j=0}^{\ell} b_{p-\ell} n^j \binom{p+1-j}{p-\ell} \binom{p+1}{j} \quad \text{en passant par la formule avec factorielles} \\
&= \sum_{j=0}^{p} n^j \binom{p+1}{j} \sum_{\ell=j}^{p} b_{p-\ell} \binom{p+1-j}{p-\ell} \\
&= \sum_{j=0}^{p} n^j \binom{p+1}{j} \sum_{m=1}^{p+1-j} b_{p+1-j-m} \binom{p+1-j}{p+1-j-m} \quad \text{par changement de variable } m = \ell - j + 1 \\
&= \sum_{j=0}^{p} n^j \binom{p+1}{j} \sum_{m=1}^{p+1-j} b_{p+1-j-m} \binom{p+1-j}{m} \quad \text{par symétrie.}
\end{aligned}$$

Par la question 2., la somme interne est nulle si $p+1-j \geq 2$, c'est-à-dire si $j \leq p-1$. Donc, $T_p(n+1) - T_p(n)$ se simplifie en le terme d'indice $j = p$ dans la somme externe :

$$T_p(n+1) - T_p(n) = n^p \binom{p+1}{p} \sum_{m=1}^{1} b_0 \binom{1}{1} = (p+1)n^p.$$

6. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Par téléscopage,

$$T_p(n) = T_p(n) - T_p(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \big(T_p(k+1) - T_p(k)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} (p+1)k^p = (p+1)S_p(n).$$

   On divise par $p+1$ pour obtenir la formule annoncée.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec les notations de l'énoncé, cette somme vaut $S_4(n+1) = S_4(n) + n^4$. Or,

$$S_4(n) = \frac{1}{5} T_4(n) = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} \binom{5}{k} b_k n^{5-k}.$$

   En reprenant les valeurs trouvées plus haut pour les nombres de Bernoulli :

$$S_4(n+1) = \frac{1}{5}\left(n^5 - \frac{5}{2}n^4 + \frac{10}{6}n^3 + \frac{5}{30}n\right) + n^4.$$

   Finalement, après simplifications :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$