Nombres complexes et trigonométrie

1 Nombres complexes

EXERCICE 1. ♢ – ◐○○ *(In)équations avec des complexes*
Résoudre dans $\mathbb{C}$ (on pourra représenter graphiquement les ensembles de solutions) :

1. $|z-i-1|=1$;
2. $1<|2z-6|<2$;
3. $|z-1|^2+|z+1|^2<8$;
4. $|z-1|+|z+1|\leq 2$;
5. $|z-1|<|z|$;
6. $|\mathrm{Re}(z)|<|z|$;
7. $\mathrm{Re}(iz+2)>0$;
8. $|z-i|^2+|z+i|^2<2$.

EXERCICE 2. ♢ – ◐○○ *Un nombre réel*
Soient z et z' des nombres complexes de module 1 tels que $zz'\neq -1$. Montrer que

$$\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}.$$

EXERCICE 3. ◐○○ *Forme trigonométrique*
Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Mettre sous forme trigonométrique :

1. $\left(-1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)^6$;
2. $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{(1+i)^3}$;
3. $z=1+\sin\theta-i\cos\theta$;
4. $w=1-i\tan\theta$

EXERCICE 4. ♣/♢ – ●◐○ *Forme trigonométrique - 2*
On considère $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Mettre z sous forme trigonométrique.

EXERCICE 5. ♣/♢ – ●●○ *Un coefficient binomial sur trois*
Soit $n\geq 1$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n=\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\equiv 0[3]}}\binom{n}{k},\ B_n=\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\equiv 1[3]}}\binom{n}{k},\ C_n=\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\equiv 2[3]}}\binom{n}{k}.$$

EXERCICE 6. ♢ – ●◐○ *Manipulation de l'inégalité triangulaire*
Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que $|z^2-1|\leq 8 \implies |z-2|\leq 5$.

EXERCICE 7. ♣ – ●●○ *Variation sur l'inégalité triangulaire*
Soient $z_1,\dots,z_n$ des nombres complexes. Montrer que $\dfrac{|\sum_{k=1}^n z_k|}{1+|\sum_{k=1}^n z_k|} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^n \dfrac{|z_k|}{1+|z_k|}$.

EXERCICE 8. ♣/♢ – ●●● *Choisir ses sauts pour aller loin*
Soient $z_1,\dots,z_n$ des nombres complexes.

1. Montrer qu'il existe $S \subset [\![1,n]\!]$ tel que $\left|\displaystyle\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^n |z_k|$.
2. Montrer que la constante $\dfrac{1}{\pi}$ est optimale, si le nombre de complexes z_k est arbitrairement grand.

2 Trigonométrie

EXERCICE 9. ●○○ *Équations trigonométriques*
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sin(3x+\pi/4) = \sin(x+\pi/3)$;
2. $\cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{2} = 0$;
3. $\cos(x+\pi/6)\cos(x-\pi/6) = 1/2$;
4. $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) \leq 1$.

EXERCICE 10. ●○○ *Valeur de* $\cos(\pi/5)$
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. En déduire la valeur de $\cos^2(\pi/10)$, puis la valeur de $\cos(\pi/5)$.

EXERCICE 11. ●○○ *Des sommes trigonométriques*
Soient $a,b \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kb)$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kb)$;
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kb)}{\cos^k(b)}$.

EXERCICE 12. ♣ – ●◐○ *Polynômes de Tchebychev, première approche*
On définit une famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la façon suivante :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Ce sont les polynômes de Tchebychev (de première espèce).

1. Calculer les polynômes T_n, pour $n \leq 4$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

On admet que T_n est le seul polynôme P vérifiant $\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

3. En utilisant la formule de Moivre, déterminer une formule explicite pour T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 13. ●◐○ *Une fausse formule de Moivre*
Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on : $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x + i\cos x)^n = \sin(nx) + i\cos(nx)$?

EXERCICE 14. ♢ – ●●○ *Un produit de cosinus et une suite récurrente*
Soit θ un réel non nul.

1. Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.
2. Déterminer la limite de P_n quand $n \to +\infty$.

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

3. Étudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 15. ♣/♢ – ●●○ *Un produit de sinus*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de calculer le produit suivant : $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

1. On pose $R_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Montrer que $P_n^2 = R_n$.
2. Déterminer les $2n-1$ solutions complexes non nulles de l'équation $(z-1)^{2n} - 1 = 0$. On les note $z_1, \dots, z_{2n-1}$.
3. On pose $U_n = \prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Exprimer U_n en fonction de R_n.
4. Calculer U_n et en déduire P_n.

EXERCICE 16. ♣/♢ – ●●○ *Une somme avec des puissances de tangente*
Soient $n \geq 1$ et $\alpha \not\equiv \pi/2[\pi]$. Montrer que

$$\sum_{0\leq 2k+1\leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \tan^{2k+1}\alpha = \frac{\sin(n\alpha)}{\cos^n \alpha}.$$

EXERCICE 17. ♣/♢ – ●●◐ *Somme et produit de cosinus*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'identité

$$\sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{\pm 1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \theta_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta_k).$$

3 Équations

EXERCICE 18. ○○○ *Racines n-èmes*
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 = 1 - i$;
2. $z^3 = -8$;
3. $z^4 = i$;
4. $z^{25} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

EXERCICE 19. ♢ – ●○○ *Équation, à l'envers*
Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Trouver deux réels p et q tels que $z^2 + pz + q = 0$.

EXERCICE 20. ♢ – ●○○ *Racines de l'unité*
Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ les n racines de l'unité. Montrer que

1. $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j^k = 0$;
2. $\prod_{j=0}^{n-1} \omega_j = (-1)^{n-1}$
3. $\sum_{j=0}^{n-1} (1 + \omega_j)^n = 2n$
4. $\forall z \in \mathbb{C}, \prod_{j=0}^{n-1} (z - \omega_j) = z^n - 1$.

EXERCICE 21. ●○○ *Avec le conjugué*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^n = \overline{z}$;
2. $1 + \overline{z} = |z|$;
3. $z^4 = z + \overline{z}$;

EXERCICE 22. ♣/♢ – ●◐○ *Équations avec des complexes*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 - (2+i)z + i + 7 = 0$;
2. $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$;
3. $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;
4. $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$;
5. $z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i = 0$;
6. $(1+iz)^n + (1-iz)^n = 0$.

4 Géométrie

EXERCICE 23. ◐○○ *Écriture de similitudes*

1. Déterminer l'expression de la similitude, composée de la rotation d'angle $\pi/3$ et de l'homothétie de rapport 2, toutes deux de centre $i - 2$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude donnée par

$$f(z) = -3z + 4(1 - 2i).$$

EXERCICE 24. ●○○ *Un lieu géométrique*
Soit $\rho > 0$, soient $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. On s'intéresse au lieu $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho |z - z_1|\}$.

1. Identifier E si $\rho = 1$.

2. On suppose $\rho \neq 1$. Montrer que E est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 25. ♢ – ●○○ *Triangle équilatéral*
Soient A, B et C des points du plan, d'affixes a, b et c.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct (l'angle $\widehat{BAC}$ vaut $\pi/3$) ssi

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral ssi

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

3. Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral (non réduit à un point) dont les trois sommets sont à coordonnées entières.

EXERCICE 26. ●◐○ *Un invariant des polygones réguliers*
Soient $S_1, \ldots, S_n$ des points du plan, sommets d'un polygone régulier, inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$. Montrer que la quantité $\sum_{k=1}^{n} S_k M^2$ ne dépend pas du point $M \in \mathscr{C}$.

EXERCICE 27. ●◐○ *Similitude conjuguée*
Soient f et g des similitudes directes du plan complexe. Caractériser la similitude $g \circ f \circ g^{-1}$ quand

1. f est une translation ;

2. f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

EXERCICE 28. ♣/♢ – ●◐○ *Un parallélogramme*
Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que z et ses trois racines cubiques forment un parallélogramme.

EXERCICE 29. ♢ – ●●◐ *Points cocycliques*
Déterminer les nombres complexes z tels que 1, z, $1/z$ et $1 - z$ soient cocycliques.

Indications

Exercice 1. Si $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, quels sont les z vérifiant $|z-a| = r$? les z vérifiant $|z-a| \leq r$?

Exercice 2. Exploiter simplement que z et z' sont de module 1. Comment caractériser les nombres réels, parmi les nombres complexes ?

Exercice 4. Calculer z^2

Exercice 5. Adapter le calcul fait pour la somme des coefficients d'indice pair/impair.

Exercice 6. Raisonner par contraposée.

Exercice 8. Si ϕ est un angle quelconque, considérer les z_k dont un argument est proche de ϕ à $\pi/2$ près. Puis déterminer le meilleur ϕ pour optimiser la minoration obtenue.

Exercice 14. Pour 1., faire apparaître un produit téléscopique. Pour 2., $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 15. Pour la question 4., on utilisera les résultats sur les polynômes admis dans le cours.

Exercice 16. Reconnaître en la somme la partie réelle ou imaginaire d'une puissance développée par la formule du binôme.

Exercice 17. On pourra procéder par récurrence.

Exercice 19. On cherche un polynôme de degré 2 à coefficients réels dont z est racine. Choisir simplement l'autre racine.

Exercice 20. Les trois premiers calculs sont explicites. Pour le dernier, utiliser les résultats sur les polynômes admis dans le cours.

Exercice 22. 3. se simplifie avec une formule bien connue. Pour 6., commencer par déterminer $\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

Exercice 25. Traduire le fait que ABC est équilatéral direct avec une rotation de centre A.

Exercice 28. Si a est l'une de ses racines cubiques, comment s'écrivent les 3 autres points ?

Exercice 29. On pourra se renseigner sur la notion de birapport.