Semaine 1 - Chapitres de début d'année

1 Logique, raisonnements

- Assertions, connecteurs logiques, conditions nécessaires et suffisantes, assertions équivalentes, réciproque, contraposée, règles de calcul
- Variables, prédicats, quantificateurs
- Négation d'une assertion
- Guide d'écriture d'une démonstration
- Raisonnements par l'absurde, par contraposée, disjonction de cas, analyse-synthèse
- Principe de récurrence, récurrences simple, double, forte
- Théorie des ensembles : ensembles usuels, inclusion et égalité d'ensembles, principe de sélection, ensemble vide, opérations sur les ensembles, produit cartésien d'ensembles, puissance (finie) d'un ensemble, ensembles des parties d'un ensemble

On parlera plus tard d'applications entre ensembles et d'injectivité/surjectivité...

2 Calculs algébriques

- Notation $\sum_{i\in I} a_i$, où les a_i sont des nombres indexés par un ensemble fini I
- Linéarité
- Changements de variables usuels (décalage, retournement, doublement pour indices pairs/impairs)
- Découpages classiques de sommes
- Somme des termes d'une suite arithmétique/géométrique
- Sommes téléscopiques
- Identité de Bernoulli
- Sommes doubles rectangulaires
- Découpages selon les lignes/les colonnes/les diagonales (dans le cas carré)
- Sommes triangulaires ; découpages
- Découpage $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{1\leq j<i\leq n} a_{i,j}$. Cas où $a_{i,j} = a_{j,i}$, pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$
- Produits, règles de calcul, transformations somme/produit, factorielle d'un entier
- Coefficients binomiaux. Si $k \notin [\![0,n]\!]$, on a défini $\binom{n}{k} = 0$.

Aucune interprétation combinatoire pour le moment.

- Formule de symétrie, relation de Pascal, formule du chef $\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$
- Triangle de Pascal, formule du binôme de Newton
- Suites arithmético-géométriques : détermination du terme général

3 Nombres réels

- Rappels sur les inégalités entre nombres réels
- Variations sur l'inégalité arithmético-géométrique
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité
- Valeur absolue
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité
- Inégalité triangulaire inversée
- Relation entre valeur absolue, minimum, maximum
- Partie entière, propriétés élémentaires
- Partie entière supérieure, partie fractionnaire (HP)
- Parties convexes de $\mathbb{R}$
- Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$
- Parties denses de $\mathbb{R}$ (une partie A est dense ssi $\forall x < y, A \cap]x, y[\neq \emptyset$)
- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$
- Partie majorée, majorant, maximum, borne supérieure
- Caractérisation de la borne supérieure
- Propriété de la borne supérieure
- De même, partie minorée...

Aucune caractérisation séquentielle à ce stade.

4 Nombres complexes

- Construction de $\mathbb{C}$ (non exigible)
- $\mathbb{C}$ est un corps (définitions non exigibles)
- Parties réelle et imaginaire, conjugaison, module
- Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 : stabilité par $\times$ et passage à l'inverse
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité (notion de nombres complexes positivement liés)
- Forme trigonométrique d'un nombre complexe (*je parle indifféremment de forme trigonométrique ou exponentielle*)
- Formules d'Euler
- Formule de Moivre
- Applications calculatoires :
    - méthode de l'angle moitié,
    - linéarisation de $\cos^k \theta$ ou $\sin^k \theta$,

- expression de $\cos(k\theta)$ ou $\sin(k\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ ou $\sin(\theta)$,
- calcul des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$.

– Résolution de l'équation $z^2 = w$ (où w est donné sous forme trigonométrique ou sous forme algébrique). *On peut parler de racines carrées d'un nombre complexe (avec l'article indéfini) mais la notation $\sqrt{w}$ suppose $w \in \mathbb{R}_+$*
– Équation polynomiale de degré 2 à coefficients complexes : expression des solutions
– Somme et produit des racines d'un polynôme de degré 2. *Aucune propriété des polynômes de degré supérieur n'est exigible pour le moment.*
– Racines n-èmes d'un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique
– Cas particulier des racines de l'unité. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des solutions de $z^n = 1$. Ce sont les puissances de $\omega_n = e^{2i\pi/n}$.
– Notation $j = e^{2i\pi/3}$

5 Trigonométrie

– Cosinus, sinus, tangente, cotangente d'un angle ; interprétation géométrique
– Périodicités
– Cosinus et sinus des angles $-\theta$, $\pi \pm \theta$ et $\pm\pi/2 \pm \theta$ en fonction de ceux de θ
– Cas d'égalité de deux cosinus, sinus, tangente
– Valeurs remarquables
– Formulaire :
  - $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$;
  - Formules d'addition/de soustraction pour cosinus, sinus et tangente
  - Formules de duplication
  - Linéarisation de $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$
  - Formules produit vers somme : p. ex. $\cos\theta\cos\phi = \dfrac{\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)}{2}$
  - Formules somme vers produit : p. ex. $\cos\theta+\cos\phi = 2\cos\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$
  - Paramétrisation de $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$ par $u = \tan(\theta/2)$

– Réécriture de $a\cos\theta + b\sin\theta$ en $r\cos(\theta+\phi)$

6 Exemples de questions de cours / applications directes du cours

– Une démonstration par récurrence
– Calculs de sommes simples, faisant intervenir des changements de variables
– Identité de Bernoulli
– Manipulations de sommes triangulaires
– Formules sur les coefficients binomiaux

- Formule du binôme de Newton
- Démonstration de l'inégalité triangulaire inversée
- Énoncer la définition de partie convexe, partie dense, borne supérieure
- Caractérisation de la borne supérieure d'une partie majorée non vide
- Démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$
- Une formule de trigonométrie (en admettant les formules d'addition)
- Détermination des racines carrées/ racines n-èmes d'un nombre complexe
- Résolution d'une équation polynomiale de degré 2
- Calcul de sommes trigonométriques