DS 1 de mathématiques

Durée : 3 heures. Les calculatrices et autres technologies sont interdites.

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les calculs aérés, les résultats mis en valeur...

Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Ils sont cependant rangés par ordre croissant de difficulté/d'abstraction et cet ordre est recommandé.

1 Une suite définie par récurrence

On considère la suite (a_n) définie par récurrence par

$$a_0 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, 2a_n = na_{n-1} + 3n!.$$

On cherche à établir une formule pour le terme général a_n. On note (u_n) une suite indéterminée telle que $u_0 = 1$ et on pose $b_n = 2a_n u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2u_{n-1} = nu_n$, alors (b_n) vérifie une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = b_{n-1} + c_n$, où c_n est à expliciter en fonction de n et u_n.
2. Déterminer la suite (u_n) vérifiant la relation précédente ; en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de b_n.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \left(3 + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) n!$. Établir ce résultat de façon indépendante, par une récurrence sur n.

2 Inégalités sur des sommes de $\mathbb{R}$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $B_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} b_i$, $m = \displaystyle\min_{1 \leq k \leq n} \{B_k\}$ et $M = \displaystyle\max_{1 \leq k \leq n} \{B_k\}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

On suppose désormais que les a_k sont positifs et rangés par ordre décroissant : $0 \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_1$.

2. Montrer que $a_1 \times m \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq a_1 \times M$.

3. En déduire que $\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq a_1 \max\limits_{1 \leq k \leq n} |b_1 + \cdots + b_k|$.

On définit $m' = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \left\{ \dfrac{b_1 + \cdots + b_k}{k} \right\}$ et $M' = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \left\{ \dfrac{b_1 + \cdots + b_k}{k} \right\}$.

4. Montrer que $m' \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M' \sum_{k=1}^{n} a_k$.

3 Une caractérisation des intervalles

On considère les deux propriétés suivantes, portant sur une partie A de $\mathbb{R}$:

i) $\forall x, y \in A, \dfrac{x+y}{2} \in A$;

ii) $\exists a < b \in \mathbb{R} : [a, b] \subset A$.

1. **Préliminaires.** Les exemples sont à justifier.
   (a) Donner un exemple d'une partie B de $\mathbb{R}$ vérifiant ii) mais pas i) ;
   (b) Donner un exemple d'une partie C de $\mathbb{R}$, contenant au moins 2 points, vérifiant i) mais pas ii).
   (c) Soient $u < v$ deux réels. On note $I =]u, v[$. Montrer que I vérifie i) et ii).

On suppose désormais que $A \subset \mathbb{R}$ vérifie i) et ii) et on souhaite montrer que A est un intervalle. On fixe $a < b$ deux réels comme dans ii).

2. Soit $x \in A$ tel que $b < x$ et $x - b \leq b - a$. On souhaite montrer que $[b, x] \subset A$.
   (a) Montrer que $\left[b, \dfrac{b+x}{2}\right] \subset A$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{b + (2^n - 1)x}{2^n}$. Quelle relation simple y a-t-il entre x, b_n et b_{n+1} ? Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, [b_n, b_{n+1}] \subset A$.
   (c) En déduire que $[b, x] \subset A$.

3. On considère de nouveau un réel $x \in A$ tel que $b < x$ mais **on ne suppose plus** que $x - b \leq b - a$. On souhaite encore montrer que $[b, x] \subset A$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $x_n = \dfrac{(2^n - 1)b + x}{2^n}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A \text{ et } x_n - x_{n+1} \leq x_{n+1} - a.$$

(b) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} - b \leq b - a$.

(c) En utilisant la question 2., en déduire que pour tout $n \in [\![0, n_0]\!], [b, x_n] \subset A$.

On montre de façon analogue que si $x \in A$ est tel que $x < a$, alors $[x, a] \subset A$.

4. En déduire que A est une partie convexe de $\mathbb{R}$ et conclure.

4 e^r est irrationnel si $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

L'objectif du problème est de montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}^*, e^r \notin \mathbb{Q}$.

1. **Préliminaires.** Cette partie n'est pas utilisée dans la suite du problème.

   (a) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

   i) $\forall r \in \mathbb{Q}^*, e^r \notin \mathbb{Q}$;

   ii) $\forall x \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}, \ln x \notin \mathbb{Q}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n(x)$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

   On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer que u_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée u_{n-1}.

   (c) En étudiant les variations des fonctions f_n et g_n définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^{-x}u_n(x)$ et $g_n(x) = e^{-x}\left(u_n(x) + \dfrac{x^n}{n!}\right)$, montrer que

$$\forall x \in]0, n/2], \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < e^x < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}.$$

   (d) En déduire que pour tout $n \geq 2$, il existe $a_n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n < n!e < a_n + 1$.

   (e) En déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

Soient f, g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$. On rappelle les éléments suivants de calcul intégral :

- **Linéarité.** Si λ et μ sont deux réels, alors

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big) dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

- **Croissance.** Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
- **Intégration par parties.** Si f et g sont dérivables sur $[a, b]$ et si leur dérivée y est continue, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt = \Big(f(b)g(b) - f(a)g(a)\Big) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$.

On rappelle aussi que si u est une fonction dérivable et si $n \in \mathbb{N}$, alors u^n est dérivable de dérivée $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, on définit

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n e^t dt \text{ et } J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-x}^{x} t(x^2 - t^2)^n e^t dt.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

2. Calculer $I_0(x)$ et $J_0(x)$.
3. Montrer que $I_n(x) = 2J_{n-1}(x)$.
4. Montrer que $J_n(x) = -(2n + 1)I_n(x) + 2x^2 I_{n-1}(x)$.
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes A_n et B_n à coefficients entiers et de degré au plus n tels que $\forall x > 0, I_n(x) = A_n(x)e^x + B_n(x)e^{-x}$.
6. Montrer l'encadrement : $0 < I_n(x) \leq \dfrac{x^{2n} I_0(x)}{n!}$, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\lim\limits_{n} I_n(x) = 0$, pour tout $x > 0$.

On fixe $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose par l'absurde que $e^r \in \mathbb{Q}$ et on écrit $e^r = \dfrac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

7. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $pqJ_n(r) \in \mathbb{N}$.
8. Aboutir à une contradiction, puis conclure.