DS 1 de mathématiques – Corrigé

1 Une suite définie par récurrence

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On multiplie la relation de récurrence définissant a_n par u_n et on obtient
$$b_n = 2a_n u_n = n a_{n-1} u_n + 3n! u_n.$$
Si (u_n) vérifie la condition de l'énoncé, ceci se réécrit en
$$b_n = 2a_{n-1}u_{n-1} + 3n!u_n = b_{n-1} + 3n!u_n.$$

2. On veut que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2}{n}u_{n-1}$. Ceci détermine (u_n) de façon unique. Par une récurrence immédiate, (u_n) ne s'annule pas et on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k} = \frac{2^n}{n!},$$
par produit téléscopique. En injectant dans l'égalité obtenue précédemment, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = b_{n-1} + 3 \times 2^n$. Par somme téléscopique, on en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n - b_0 = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 3 \times 2^k = 6(2^n - 1).$$
Comme $b_0 = a_0 = 5$, on a $b_n = 6(2^n - 1) + 10$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{b_n}{2u_n} = \frac{3(2^n-1)+5}{2^n} \times n! = \left(3 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times n!.$$
Redémontrons ce résultat, par récurrence sur n.

   - Par hypothèse, $a_0 = 5$ et on a bien $\left(1 - \dfrac{1}{2^{-1}}\right) \times 0! = 5$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = \left(3 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) \times n!$. Alors,
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n+1}{2} \times a_n + \frac{3(n+1)!}{2} \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}\right) \times (n+1)! + \frac{3(n+1)!}{2} \\ a_{n+1} &= \left(3 - \frac{1}{2^n}\right) \times (n+1)! \end{aligned}$$

L'hérédité est donc établie et l'égalité est montrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Inégalités sur des sommes de $\mathbb{R}$

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $b_k = B_k - B_{k-1}$, avec par convention $B_0 = 0$. Donc,
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell+1} B_\ell = a_n B_n - a_1 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$
Comme $B_0 = 0$, ceci conclut.

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $m \leq B_k \leq M$. Comme a_n et les $a_k - a_{k+1}$ sont positifs, on déduit de l'égalité précédente que :
$$a_n m + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) m \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq a_n M + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) M.$$
Par téléscopage, le membre de gauche vaut $a_1 m$ et celui de droite $a_1 M$, d'où la conclusion.

3. Notons M_a la quantité $\max\limits_{1 \leq k \leq n} |b_1 + \cdots + b_k|$. Pour tout k, on a $b_1 + \cdots + b_k \leq |b_1 + \cdots + b_k| \leq M_a$. Comme c'est vrai pour tout k, on en déduit que $M \leq M_a$. Par ailleurs, pour tout k, on a $-(b_1 + \cdots + b_k) \leq M_a$. Et donc, $-m = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \big\{ -(b_1 + \cdots + b_k) \big\} \leq M_a$. Ainsi, $m \geq -M_a$.

   Avec les inégalités précédentes, on a donc : $-a_1 \times M_a \leq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leq a_1 \times M_a$. Donc, $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq M_a$, ce qu'il fallait démontrer.

4. On réécrit la question 1, comme :
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = n a_n \times \frac{B_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} k (a_k - a_{k+1}) \frac{B_k}{k}.$$
Pour tout k, on a l'encadrement $m' \leq \dfrac{B_k}{k} \leq M'$. De plus, les $a_k - a_{k+1}$ et a_n sont positifs. On en déduit l'encadrement :
$$n a_n \times m' + \sum_{k=1}^{n-1} k (a_k - a_{k+1}) m' \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq n a_n \times M' + \sum_{k=1}^{n} k (a_k - a_{k+1}) M'.$$
Or, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k (a_k - a_{k+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k a_k - \sum\limits_{k=2}^{n} (k-1) a_k = a_1 - (n-1) a_n + \sum\limits_{k=2}^{n-1} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k - n a_n$.
D'où l'encadrement annoncé.

3 Une caractérisation des intervalles

1. **Préliminaires.**

   (a) On note $B = [0,1] \cup \{2\}$. Alors, $[0,1] \subset B$, donc B vérifie ii). Mais 1 et 2 sont dans B tandis que $\dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$ n'y est pas, donc B ne vérifie pas i).

   (b) On considère $C = \mathbb{Q}$. D'une part, C vérifie i) car la moyenne de deux rationnels est un rationnel. D'autre part, C ne vérifie pas ii) : en effet, si C contenait un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$, cet intervalle ne contiendrait aucun irrationnel, ce qui contredirait la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

   (c) Soient $x, y \in I$. Alors, $u < x, y < v$. Donc, $\dfrac{x+y}{2} < \dfrac{v+v}{2} = v$ et de même $\dfrac{x+y}{2} > u$. Donc, $\dfrac{x+y}{2} \in I$; donc I vérifie i). Comme I contient par exemple le segment $[\dfrac{2u+v}{3}, \dfrac{u+2v}{3}]$, I vérifie aussi ii).

2. (a) Soit $u \in \mathbb{R}$ tel que $b \leq u \leq \dfrac{b+x}{2}$. Alors, u est le milieu du segment d'extrémités x et $u - (x-u) = 2u - x$. Comme $u \leq \dfrac{b+x}{2}$, $2u - x \leq b$. De plus, x vérifie par hypothèse $x - b \leq b - a$ donc $x \leq 2b - a$, donc $-x \geq a - 2b$. Dès lors, $2u - x \geq 2u + a - 2b \geq a$. Ainsi, $2u - x \in [a,b]$. Donc, $2u - x$ et x sont tous deux dans A, donc leur milieu u aussi. On a montré l'inclusion souhaitée.

   (b) On a $\dfrac{b_n + x}{2} = \dfrac{b + 2(2^n - 1)x + x}{2^{n+1}} = \dfrac{b + (2^{n+1} - 1)x}{2^{n+1}} = b_{n+1}$. On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[b_n, b_{n+1}] \subset A$ par récurrence forte sur n :

   - Pour $n = 0$, il s'agit de la question précédente.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \leq n$, $[b_k, b_{k+1}] \subset A$. Alors A contient $[a,b]$ et l'union de tous les $[b_k, b_{k+1}]$, pour $k \in [\![0, n]\!]$, donc $[a, b_{n+1}] \subset A$.
     Comme $b_{n+1} > b$ et que $x - b \leq b - a$, on a aussi $x - b_{n+1} \leq b_{n+1} - a$. On peut donc appliquer la question précédente en remplaçant b par b_{n+1}. Comme $b_{n+2} = \dfrac{b_{n+1} + x}{2}$, on en déduit que $[b_{n+1}, b_{n+2}] \subset A$.

   (c) La suite (b_n) est strictement croissante et de limite x. De plus, $b_0 = b$. On en déduit que tout élément $y \in [b, x[$ est dans (exactement) un $[b_n, b_{n+1}]$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, $[b, x[\subset A$. Comme par hypothèse $x \in A$, $[b, x] \subset A$.

3. (a) Comme précédemment, x_{n+1} est le milieu du segment d'extrémités b et x_n. De plus, $x_0 = x$. Par une récurrence immédiate, on a $x_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   De plus, si $n \in \mathbb{N}$, $x_n - x_{n+1} = x_{n+1} - b \leq x_{n+1} - a$ car $a < b$.

   (b) Comme (x_n) tend vers b, on a $\lim_n (x_n - b) = 0 < b - a$. En particulier, il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} - b \leq b - a$.

(c) On procède par récurrence descendante sur $n \in [\![0, n_0]\!]$.

- Par la question précédente et la question 2.a), on a $[b, x_{n_0}] \subset A$.
- Soit $n \in [\![1, n_0]\!]$ tel que $[b, x_n] \subset A$. Alors, on a aussi $[a, x_n] \subset A$. Comme $x_{n-1} - x_n \leq x_n - a$, on a $[x_n, x_{n-1}] \subset A$ par la question 2.c). Et donc aussi $[b, x_{n-1}] \subset A.$, ce qui conclut l'hérédité.

4. Soient $x < y \in A$. On doit montrer que $[x, y] \subset A$. On distingue différents cas :

- Si $x \leq y \leq a$, alors $[x, a] \subset A$ par ce qui précède. En particulier, $[x, y] \subset A$.
- Si $x \leq a \leq y \leq b$, alors $[x, a] \subset A$ et donc aussi $[x, y] \subset A$ car $[a, y] \subset [a, b]$.
- Si $x \leq a \leq b \leq y$, on a $[x, a] \subset A$, $[a, b] \subset A$ et $[b, y] \subset A$ donc $[x, y] \subset A$.
- Les autres cas sont analogues.

Ainsi, A est une partie convexe de $\mathbb{R}$. Donc, A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque. Cette dernière question est assez artificielle. Il est plus naturel de démontrer directement que A est un intervalle en imitant la preuve du cours de la caractérisations *intervalles = convexes*, plutôt que de passer par la convexité.

4 e^r est irrationnel si $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

1. **Préliminaires.**

(a) Supposons i). Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ tel que $\ln x \in \mathbb{Q}$. Comme $\ln x \in \mathbb{Q}^*$, on a $x = e^{\ln x} \notin \mathbb{Q}$, d'après i). Par contraposée, on en déduit que si $x \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$, alors $\ln x \notin \mathbb{Q}$.
Supposons ii). Soit $r \in \mathbb{R}^*$ tel que $e^r \in \mathbb{Q}$. Alors, $e^r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$ et donc $r = \ln(e^r) \notin \mathbb{Q}$. On conclut de nouveau par contraposée que si $r \in \mathbb{Q}^*$, alors $e^r \notin \mathbb{Q}$.

(b) La fonction u_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = u_{n-1}(x)$, après changement de variable.

(c) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $x \mapsto -e^{-x}(u_n(x) - u_{n-1}(x)) = -e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$. Comme f_n' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$; de plus $f_n(0) = 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) < 1$. En multipliant de part et d'autre par e^x, on obtient la première inégalité (pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$).
La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $x \mapsto -e^{-x}\left(u_n(x) + \dfrac{x^n}{n!} - u_{n-1}(x) - \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$.
On a donc $g_n'(x) = -e^{-x}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\dfrac{2x}{n} - 1\right)$. Donc, g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0, n/2]$. Comme $g_n(0) = 1$, on a $\forall x \in]0, n/2], g_n(x) > 1$. En

multipliant de part et d'autre par e^x, on obtient la deuxième inégalité (pour tout $x \in]0, n/2]$)

(d) Soit $n \geq 2$. En prenant $x = 1$ dans les inégalités précédentes, on a donc :

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{k!}.$$

Pour tout $k \leq n$, $\dfrac{n!}{k!}$ est entier. En notant $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$, on a donc $a_n \in \mathbb{N}$ et $a_n < n!e < a_n + 1$.

(e) Supposons par l'absurde que $e = \dfrac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité précédente pour $n = q$ donne donc $a_q < q!e < a_q + 1$. Or $q!e \in \mathbb{N}$. C'est donc un entier naturel strictement compris entre deux entiers naturels successifs ; d'où la contradiction recherchée.

2. On a $I_0(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} e^t dt = e^x - e^{-x}$. Pour $J_0(x)$, on fait une intégration par parties :

$$J_0(x) = \int_{-x}^{x} te^t dt = xe^x - (-xe^{-x}) - \int_{-x}^{x} e^t dt = (x-1)e^x + (x+1)e^{-x}.$$

3. On intègre par parties dans $I_n(x)$ en dérivant $t \mapsto (x^2 - t^2)^n$ et en intégrant $t \mapsto e^t$. On a donc :

$$n!I_n(x) = (x^2-x^2)^n e^x - (x^2-(-x)^2)^n e^{-x} + \int_{-x}^{x} 2nt(x^2-t^2)^{n-1} e^t dt = 2n(n-1)!J_{n-1}(x).$$

D'où $I_n(x) = 2J_{n-1}(x)$.

4. On fait une intégration par parties dans $J_n(x)$ en dérivant $f : t \mapsto t(x^2 - t^2)^n$ et en intégrant $t \mapsto e^t$. On a $f'(t) = (x^2 - t^2)^n - 2nt^2(x^2 - t^2)^{n-1}$. Donc,

$$n!J_n(x) = x(x^2-x^2)^n e^x - (-x)(x^2-(-x)^2)^n e^{-x} - \int_{-x}^{x} (x^2-t^2)^n e^t dt + 2n \int_{-x}^{x} t^2(x^2-t^2)^{n-1} e^t dt.$$

Dans l'intégrale de droite, on écrit $t^2 = -(x^2 - t^2) + x^2$. Ainsi,

$$n!J_n(x) = -n!I_n(x) - 2n \times n!I_n(x) + 2nx^2(n-1)!I_{n-1}(x).$$

Après simplification par $n!$, on a bien $J_n(x) = -(2n+1)I_n(x) + 2x^2 I_{n-1}(x)$.

5. On le montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, cela résulte de la question 2 : on peut poser $A_0 = 1$ et $B_0 = -1$. Pour $n = 1$, on a $I_1(x) = 2J_0(x)$; donc $A_1 = 2(X-1)$ et $B_1 = 2(X+1)$ conviennent.

- Soit $n \geq 2$. On suppose le résultat établi aux rangs $n-1$ et $n-2$. Pour tout $x > 0$, on a

  $$I_n(x) = 2J_{n-1}(x) = -2(2n-1)I_{n-1}(x) + 2x^2 I_{n-2}(x).$$

  Avec les notations de l'énoncé, on peut donc écrire :

  $$I_n(x) = -2(2n-1)\Big(A_{n-1}(x)e^x + B_{n-1}(x)e^{-x}\Big) + 2x^2\Big(A_{n-2}(x)e^x + B_{n-2}(x)e^{-x}\Big).$$

  En posant $A_n = 2X^2 A_{n-2} - 2(2n-1)A_{n-1}$ et $B_n = 2X^2 B_{n-2} - 2(2n-1)B_{n-1}$, on a l'expression souhaitée. De plus, A_n et B_n sont à coefficients car A_{n-1}, A_{n-2}, B_{n-1} et B_{n-2} le sont et les degrés de A_n et B_n sont au maximum ceux de $n-2$ plus 2, c'est-à-dire n.

6. $I_n(x)$ est l'intégrale sur le segment $[-x, x]$ non trivial d'une fonction strictement positive, donc $I_n(x) > 0$. De plus, pour $t \in [-x, x], (x^2 - t^2) \leq x^2$. Donc, $(x^2 - t^2)^n e^t \leq x^{2n} e^t$. Par propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit que $I_n(x) \leq \dfrac{x^{2n}}{n!}\displaystyle\int_{-x}^{x} e^t dt$.

   Par théorème d'encadrement, on veut alors montrer que pour un x fixé, $\lim\limits_n \dfrac{x^{2n}}{n!} = 0$.
   Or, $\dfrac{x^{2n}}{n!} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{x^2}{k}$. Si k est plus grand qu'un certain indice $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{x^2}{k} \leq \dfrac{1}{2}$.
   Alors, si $n \geq n_0$, $\dfrac{x^{2n}}{n!} \leq \displaystyle\prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{x^2}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$. On a majoré $\dfrac{x^{2n}}{n!}$ par une suite tendant vers 0, donc cette suite tend aussi vers 0, donc $\big(I_n(x)\big)$ aussi.

7. D'après la question 5., $I_n(r) = A_n(r)e^r + B_n(r)e^{-r}$, où A_n et B_n sont des polynômes à coefficients entiers de degré $\leq n$. Comme $e^r = \dfrac{p}{q}$, on en déduit :

   $$pqI_n(r) = A_n(r)p^2 + B_n(r)q^2.$$

   Comme A_n et B_n sont à coefficients entiers et que r est un entier, le membre de droite est un entier. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $pqI_n(r) \in \mathbb{N}$.

8. Par ailleurs, d'après la question précédente, $I_n(r)$ est strictement positif et tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $pqI_n(r)$ aussi. On a donc une suite d'entiers strictement positifs tendant vers 0, ce qui est absurde.
   On en déduit que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $e^r \notin \mathbb{Q}$. Considérons maintenant $\dfrac{p}{q}$ un rationnel strictement positif ; si on avait $e^{\frac{p}{q}}$ rationnel, alors $e^p = \left(e^{\frac{p}{q}}\right)^q$, serait aussi rationnel, ce qui n'est pas. Donc, e^r est irrationnel pour tout rationnel $r > 0$. Enfin, si $r < 0$ est un rationnel, on a $e^{-r} = \dfrac{1}{e^r}$, de sorte que e^{-r} est aussi irrationnel. Ceci conclut.