DM 3 - Homographies et birapport

1 Questions préliminaires

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour que $g \circ f(z) = g\big(f(z)\big)$ soit bien définie, il faut et il suffit que z ne soit pas le pôle éventuel de f et que $f(z)$ (si défini) ne soit pas le pôle éventuel de g. Or, si $w \in \mathbb{C}$ est un point quelconque, on constate immédiatement (et on le remontrera question 3) que l'équation $f(z) = w$ admet au plus une solution. Donc, il y a au plus un $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z)$ est le pôle éventuel de g.
   En prenant pour X l'ensemble formé par le pôle (éventuel) de f et l'unique antécédent (éventuel) du pôle (éventuel) de g, on a montré que $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{C} - X$.

2. Soit $z \in \mathbb{C} - X$. On écrit f et g comme $f : w \mapsto \dfrac{aw+b}{cw+d}$ et $g : w \mapsto \dfrac{a'w+b'}{c'w+d'}$ avec $a, b, c, d, a', b', c', d'$ des complexes tels que $ad - bc \neq 0$ et $a'd' - b'c' \neq 0$. On calcule :
$$\begin{aligned} g \circ f(z) &= g\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) \\ &= \frac{a'\frac{az+b}{cz+d} + b'}{c'\frac{az+b}{cz+d} + d'} \\ &= \frac{a'(az+b) + b'(cz+d)}{c'(az+b) + d'(cz+d)} \\ g \circ f(z) &= \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)} \end{aligned}$$
   De plus, $(a'a+b'c)(c'b+d'd) - (a'b+b'd)(c'a+d'c) = a'd'ad + b'c'bc - a'd'bc - b'c'ad$, après simplifications et on reconnaît : $(ad - bc)(a'd' - b'c')$, qui est donc non nul.

3. On écrit $f : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$. Soit $w \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ différent du pôle éventuel de f. On a
$$f(z) = w \iff \frac{az+b}{cz+d} = w \iff az + b = w(cz+d) \iff z(a - cw) = -b + dw.$$
   - Si $a - cw \neq 0$, l'unique antécédent de w par f est donc $\dfrac{-b+dw}{a-cw}$.
   - Si $a - cw = 0$, alors $c \neq 0$ (car a et c ne peuvent pas tous les deux être nuls) donc $w = \dfrac{a}{c}$. Alors, $-b + dw \neq 0$ car $ad - bc \neq 0$. Ainsi, $w = \dfrac{a}{c}$ n'a pas d'antécédent par f.

4. On pose $f^{-1} : w \mapsto \dfrac{dw - b}{-cw + a}$. Comme $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$, f^{-1} est une homographie. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $f \circ f^{-1}$ est bien défini en w. Alors, par définition, $f^{-1}(w)$ est un antécédent de w par f. On a donc $f \circ f^{-1}(w) = w$. Avec l'abus de notation donné plus haut dans

l'énoncé, on a donc $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $f^{-1} \circ f$ est bien défini en z. Alors, $f^{-1}\big(f(z)\big)$ est par définition un antécédent de $f(z)$ par f. Or, on sait qu'il y a au plus un tel antécédent et z en est un. Donc, $f^{-1}\big(f(z)\big) = z$ et donc $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

2 Birapports

1. **Sens** $(B) \implies (A)$**.**

   (a) On suppose que z_1, z_2, z_3 et z_4 sont alignés. Il existe donc $u \in \mathbb{C}$ et des réels α, β, γ et δ tels que $z_1 - z_3 = \alpha u$, $z_1 - z_4 = \beta u$, $z_2 - z_4 = \gamma u$ et $z_2 - z_3 = \delta u$.
   Alors $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \dfrac{\alpha}{\beta} \times \dfrac{\gamma}{\delta} \in \mathbb{R}$.

   (b) On suppose que z_1, z_2, z_3 et z_4 sont cocycliques. Notons ω le cercle du centre qui les contient, R son rayon. On peut donc trouver des angles θ_j, pour $j \in [\![1,4]\!]$ tels que

   $$\forall j \in [\![1,4]\!], z_i = \omega + Re^{i\theta_j}.$$

   Alors,

   $$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(\omega + Re^{i\theta_1}) - (\omega + Re^{i\theta_3})}{(\omega + Re^{i\theta_1}) - (\omega + Re^{i\theta_4})} \times \frac{(\omega + Re^{i\theta_2}) - (\omega + Re^{i\theta_4})}{(\omega + Re^{i\theta_2}) - (\omega + Re^{i\theta_3})}.$$

   D'où

   $$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{e^{i\theta_1} - e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_1} - e^{i\theta_4}} \times \frac{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_4}}{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_3}} = \frac{\cos(\frac{\theta_1 - \theta_3}{2})}{\cos(\frac{\theta_1 - \theta_4}{2})} \times \frac{\cos(\frac{\theta_2 - \theta_4}{2})}{\cos(\frac{\theta_2 - \theta_3}{2})} \in \mathbb{R},$$

   par la méthode de l'angle moitié.

2. **Des homographies envoyant le cercle unité sur l'axe réel.**

   (a) Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. On calcule :

   $$f(z) = i\left(\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2}\right) = i\left(\frac{1 + 2i\mathrm{Im}z - |z|^2}{|1-z|^2}\right).$$

   Ainsi $\mathrm{Im} f(z) = \dfrac{1 - |z|^2}{|1-z|^2}$. On en déduit que

   $$f(z) \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im} f(z) = 0 \iff |z|^2 = 1 \iff z \in \mathbb{U}.$$

   (b) Notons $f_\theta : z \mapsto i\left(\dfrac{1 + e^{-i\theta}z}{1 - e^{-i\theta}z}\right)$. L'homographie f_θ a pour pôle $e^{i\theta}$. Soit $z \in \mathbb{C} - \{e^{i\theta}\}$. On a $f_\theta(z) = f(e^{-i\theta}z)$, donc le calcul précédent montre que

   $$f_\theta(z) \in \mathbb{R} \iff e^{-i\theta}z \in \mathbb{U} \iff z \in \mathbb{U}.$$

(c) Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} - \{1\}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
&[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] \\
&\quad = \frac{i\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right) - i\left(\frac{1+z_3}{1-z_3}\right)}{i\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right) - i\left(\frac{1+z_4}{1-z_4}\right)} \times \frac{i\left(\frac{1+z_2}{1-z_2}\right) - i\left(\frac{1+z_4}{1-z_4}\right)}{i\left(\frac{1+z_2}{1-z_2}\right) - i\left(\frac{1+z_3}{1-z_3}\right)} \\
&\quad = \frac{(1+\frac{2}{1-z_1}) - (1+\frac{2}{1-z_3})}{(1+\frac{2}{1-z_1}) - (1+\frac{2}{1-z_4})} \times \frac{(1+\frac{2}{1-z_2}) - (1+\frac{2}{1-z_4})}{(1+\frac{2}{1-z_2}) - (1+\frac{2}{1-z_3})} \\
&\quad = \frac{\frac{1}{1-z_1} - \frac{1}{1-z_3}}{\frac{1}{1-z_1} - \frac{1}{1-z_4}} \times \frac{\frac{1}{1-z_2} - \frac{1}{1-z_4}}{\frac{1}{1-z_2} - \frac{1}{1-z_3}} \\
&\quad = \frac{(1-z_3)(1-z_4) - (1-z_1)(1-z_4)}{(1-z_3)(1-z_4) - (1-z_1)(1-z_3)} \times \frac{(1-z_4)(1-z_3) - (1-z_2)(1-z_3)}{(1-z_3)(1-z_4) - (1-z_2)(1-z_4)} \\
&\quad = \frac{(1-z_3) - (1-z_1)}{(1-z_4) - (1-z_1)} \times \frac{(1-z_4) - (1-z_2)}{(1-z_3) - (1-z_2)} \\
&\quad = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \times \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \\
&\quad = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4]
\end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat pour $\theta = 0$. Soient alors $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} - \{e^{i\theta}\}$. On a

$$\begin{aligned}
[f_\theta(z_1) : f_\theta(z_2) : f_\theta(z_3) : f_\theta(z_4)] &= [f(e^{-i\theta_1}) : f(e^{-i\theta_2}) : f(e^{-i\theta_3}) : f(e^{-i\theta_4})] \\
&= [e^{-i\theta} z_1 : e^{-i\theta} z_2 : e^{-i\theta} z_3 : e^{-i\theta} z_4] \\
&= [z_1 : z_2 : z_3 : z_4],
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant immédiate.

3. **Sens** $(A) \implies (B)$**.** Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des nombres complexes deux à deux distincts.

(a) On suppose z_1, z_2, z_3 alignés. Il existe donc $u \in \mathbb{C}$ et des réels α, β tels que $z_1 - z_3 = \alpha u$ et $z_2 - z_3 = \beta u$. On calcule

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{\alpha u}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{\beta u} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}.$$

Ainsi, si le birapport $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ est réel, le rapport $\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$ l'est aussi. Par le cours, cela implique que z_1, z_2, z_4 sont alignés. Finalement, les 4 points sont alignés.

(b) Notons ω le centre de $\mathscr{C}$ et $r > 0$ son rayon. La similitude $h : w \mapsto \frac{w - \omega}{r}$ est telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \in \mathscr{C} \iff h(z) \in \mathbb{U}.$$

Si θ est un réel quelconque tel que $e^{i\theta}$ est distinct des images $h(z_1)$, $h(z_2)$, $h(z_3)$ et $h(z_4)$, on a donc, en utilisant les homographies f_θ précédentes, pour tout z différent du pôle p de $f_\theta \circ h$:

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{p\}, z \in \mathscr{C} \iff f_\theta \circ h(z) \in \mathbb{R}.$$

(c) En particulier, montrer que z_4 est sur $\mathscr{C}$ est équivalent à montrer que $f_\theta \circ h(z_4)$ est réel. Or,

$$[f_\theta\circ h(z_1) : f_\theta\circ h(z_2) : f_\theta\circ h(z_3) : f_\theta\circ h(z_4)] = [h(z_1) : h(z_2) : h(z_3) : h(z_4)] = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in \mathbb{R}.$$

La première égalité vient du fait qu'on a montré que f_θ préserve le birapport ; la deuxième vient du fait analogue pour la similitude h (calcul immédiat).
Ainsi, les images $f_\theta \circ h(z_i)$ sont alignées. Comme les 3 premières sont réelles, la 4ème aussi. Donc, $f_\theta \circ h(z_4)$ est réel ; et donc $z_4 \in \mathscr{C}$.

4. Commençons par éliminer les z pour lesquels 1, z, $1-z$ et $\dfrac{1}{z}$ ne sont pas deux à deux distincts. Pour que 1 ne soit pas l'un des autres, on doit avoir $z \neq 1$ et $z \neq 0$. Pour que z ne soit pas $1-z$, on doit avoir $z \neq 1/2$. Pour que z ne soit pas $\dfrac{1}{z}$, on doit avoir $z \neq -1$ (et 1 déjà dit). Enfin, pour que $1-z$ ne soit pas $\dfrac{1}{z}$, on doit avoir après calculs $z \neq e^{\pm i\pi/3}$.
Soit donc $z \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1, 1/2, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$. Supposons que les points 1, z $1-z$ et $\dfrac{1}{z}$ sont cocycliques. Alors, le birapport $[1 : z : \dfrac{1}{z} : 1-z]$ est réel. Après calculs, ce birapport $B(z)$ vaut $\dfrac{2z-1}{z(z+1)}$.
On écrit $z = x+iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Comme $B(z) = \dfrac{(2z-1)\overline{z}(\overline{z}+1)}{|z|^2|z+1|^2}$, $B(z)$ est réel ssi la partie imaginaire de $(2z-1)\overline{z}(\overline{z}+1)$ est nulle. On calcule :

$$\begin{aligned}(2z-1)\overline{z}(\overline{z}+1) &= (2x+2iy-1)(x-iy)(x+1-iy)\\ &= (2x+2iy-1)(x(x+1)-y^2+i(-2xy-y))\\ &= K + i\Big((2y)(x(x+1)-y^2) - y(2x-1)(2x+1)\Big)\end{aligned}$$

où K est un réel, qu'on ne calcule pas. Ainsi, $B(z)$ est réel ssi $y\Big(2(x(x+1)-y^2)-(2x-1)(2x+1)\Big)$ est nul ssi $y = 0$ ou $2x^2+2x-2y^2-4x^2+1 = 0$
ssi $y = 0$ ou $2x^2-2x+2y^2 = 1$
ssi $y = 0$ ou $(x-1/2)^2+y^2 = 3/4$.
Ainsi, $B(z)$ est réel ssi $y = 0$ ou (x, y) est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(1/2, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}/2$.
Réciproquement, le cas y réel correspond à des points 1, z, $1-z$ et $\dfrac{1}{z}$ alignés (sur l'axe des abscisses). Supposons maintenant que $z \in \mathscr{C}$. Alors $1-z$ aussi (c'est le symétrique de z par la symétrie centrale de centre $(1/2, 0)$). Donc, les points z, $1/z$ et $1/2$ sont alignés. Si 1 est aussi aligné avec z et $1/z$, on en déduit donc que z est réel, ce qui concerne uniquement les deux points $\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ de $\mathscr{C}$.
Bilan : les points 1, z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ sont cocycliques (deux à deux distincts) ssi z est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(1/2, 0)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et z est distinct de $e^{\pm i\pi/3}$ et de $\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

3 Homographies préservant le disque unité

1. Soient f et g deux homographies dans K. On sait que $g \circ f$ et f^{-1} sont des homographies. De plus, des égalités $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ et $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, on déduit que $g \circ f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ et $f^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Donc

$g \circ f$ et f^{-1} sont dans K.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{D} - \{0\}$ (pour $\alpha = 0$, f_0 est l'identité et tout est clair). L'homographie f_α a pour pôle $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$, de module $\dfrac{1}{|\alpha|} > 1$. Donc son pôle est hors de $\mathbb{D}$. De plus, on a manifestement $f_\alpha(\alpha) = 0$.

   Soit $z \in \mathbb{D}$. On a $|z-\alpha|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{\alpha} z) + |\alpha|^2$ et $|1-\overline{\alpha} z|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}(\overline{\alpha} z) + |\alpha|^2|z|^2$. Comme $|z| < 1$ et $|\alpha| < 1$, on a :
$$(1-|z|^2)(1-|\alpha|^2) \geq 0,$$
   d'où en développant $|z|^2 + |\alpha|^2 < 1 + |\alpha|^2|z|^2$. On en déduit que $|z-\alpha|^2 < |1-\overline{\alpha} z|^2$, puis finalement que $|f_\alpha(z)| < 1$. Donc $f_\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

   Par les calculs de l'exercice 1, $f_\alpha^{-1} : z \mapsto \dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha} z}$. Donc $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$ et l'argument précédent montre que $f_\alpha^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Donc $\mathbb{D} \subset f_\alpha(\mathbb{D})$.

   Finalement, on a montré que $f_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

3. (a) Comme f est une homographie, il existe des complexes a, b, c, d tels que $ad - bc \neq 0$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
   L'hypothèse $f(0) = 0$ donne $b = 0$. Donc $d \neq 0$ et en divisant par d, on a, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \dfrac{\alpha z}{\beta z + 1}$, en posant $\alpha = a/d$ et $\beta = b/d$.

   (b) f^{-1} est donnée par $z \mapsto \dfrac{z}{-\beta z + \alpha}$.

   (c) Comme f n'a pas de pôle dans $\mathbb{D}$, le dénominateur $\beta z + 1$ ne doit pas s'annuler pour $z \in \mathbb{D}$. Donc $\beta^{-1} \notin \mathbb{D}$, ce qui est équivalent à $|\beta| \leq 1$.
   De même, le dénominateur $-\beta z + \alpha$ dans l'expression de f^{-1} ne doit pas s'annuler pour $z \in \mathbb{D}$. On obtient donc (si $\beta \neq 0$) $-\dfrac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{D}$, ce qui donne $|\beta| \leq |\alpha|$ (inégalité aussi valable si $\beta = 0$).

   (d) La première inégalité est une traduction de $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. La deuxième de $f^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

   (e) Écrivons $\beta = re^{i\theta}$ et $\alpha = Re^{i\phi}$, avec $r, R \in [0,1[$ et $\theta, \phi \in [0, 2\pi[$. Soit $t \in [0,1[$. Pour $z = -te^{-i\theta} \in \mathbb{D}$, on a $|\beta z + 1| = |1 - rt| = 1 - rt = 1 - |\beta| t$. On a utilisé que $1 - rt \geq 0$, puisque r et t sont inférieurs à 1. Donc, en substituant z dans la première inégalité de la question précédente, on obtient
$$|\alpha| t < 1 - |\beta| t.$$
   On pose maintenant $z = te^{i(\phi-\theta)} \in \mathbb{D}$. On a $-\beta z + \alpha = (R - tr)e^{i\theta}$, de module $R - tr = |\alpha| - t|\beta|$ (car $|\beta| \leq |\alpha|$). En substituant z dans la deuxième inégalité de la question précédente, il vient donc :
$$t < |\alpha| - |\beta| t.$$

   (f) Les inégalité de la question précédentes sont valables pour tout $t \in [0,1[$. En faisant tendre t vers 1, on obtient :
$$|\alpha| \leq 1 - |\beta| \text{ et } 1 \leq |\alpha| - |\beta|.$$
   On a donc la chaîne d'inégalités suivante :
$$1 - |\beta| \leq 1 + |\beta| \leq |\alpha| \leq 1 - |\beta|.$$

Ce n'est possible que si toutes ces inégalités sont des égalités. Ce qui implique $|\alpha| = 1$ et $|\beta| = 0$. En écrivant $\alpha = e^{i\theta}$, on a donc $f : z \mapsto e^{i\theta} z$.

4. Soit $f \in K$. Notons $\alpha = f(0)$ et posons $g = f_\alpha \circ f$. Alors $g \in K$ et $g(0) = f_\alpha(\alpha) = 0$. D'après la question précédente, il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g : z \mapsto e^{i\theta} z$.

   Comme $f = (f_\alpha)^{-1} \circ g = f_{-\alpha} \circ g$, on en déduit que f est de la forme :

$$f : z \mapsto \frac{e^{i\theta} z + \alpha}{1 + \overline{\alpha} e^{i\theta} z},$$

   avec $\alpha \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

   Réciproquement, les homographies de cette forme sont des éléments de K, puisqu'elles sont obtenues comme composées de $f_{-\alpha}$ et de $g : z \mapsto e^{i\theta}$, qui sont bien des éléments de K.