Fonctions et calcul différentiel

1 Généralités

EXERCICE 1. ◐○○ *Étude de parité*
Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$;
2. $f_2(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$;
3. $f_3(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.

EXERCICE 2. ●○○ *Étude de fonctions*
Étudier les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
2. $f_2(x) = x^{-\ln x}$;
3. $f_3(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$;
4. $f_4(x) = \sqrt{\dfrac{|\ln(x)|}{x}}$.

EXERCICE 3. ●○○ *$f \circ f$ croissante et $f \circ f \circ f$ décroissante*
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

EXERCICE 4. ♣/♢ – ●◐○ *Une fonction avec beaucoup de périodes*
Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non constante, admettant des périodes strictement positives arbitrairement petites.

EXERCICE 5. ●●◐ *Une équation fonctionnelle*
Montrer qu'il existe une unique fonction monotone $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right) \text{ et } f(x) + f(1-x) = 1,$$

pour tout $x \in [0,1]$.

EXERCICE 6. ♣/♢ – ●●● *Fonction de Dirichlet*
On note $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction de Dirichlet, définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \lim\limits_{m \to +\infty} \lim\limits_{n \to +\infty} \cos^{2n}(2\pi x m!)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas une suite (f_n) de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

EXERCICE 7. ○○○ $\sin(nx)$
Montrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

EXERCICE 8. ♣/♢ – ●◐○ *Fonctions trigonométriques et réciproques*
Déterminer l'ensemble de définition et simplifier les expressions suivantes :

1. $\sin(\arccos x)$;
2. $\sin(\arctan x)$;
3. $\arccos\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}\right)$;
4. $\cos(2\arcsin x)$;
5. $\cos(2\arctan x)$;
6. $\cos\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\right)$;
7. $\tan(\arcsin x)$;
8. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$;
9. $\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)$.

EXERCICE 9. ◐○○ *Formules d'addition en trigonométrie hyperbolique*
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Proposer et démontrer des formules pour $\operatorname{ch}(x+y)$, $\operatorname{sh}(x+y)$ et $\operatorname{th}(x+y)$.

EXERCICE 10. ♣/♢ – ●○○ *Somme de fonctions hyperboliques*
Soient a, b deux réels. Simplifier $C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$.

EXERCICE 11. ♣ – ●◐○ *Formule de Machin*

1. Montrer que $\dfrac{(5+i)^4}{239+i} = 2(1+i)$.
2. En déduire que $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.
3. Montrer l'égalité $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 12. ♣/♢ – ●●○ *Formule d'addition des arctangentes*
Soient x et y deux réels tels que $xy \neq 1$.

1. Montrer que $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy} + k\pi$, où
$$k = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1, x > 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1, x < 0 \end{cases}$$
2. Utiliser cette formule pour redémontrer la formule de Machin.

EXERCICE 13. ●○○ *Une somme d'arctangentes*

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right).$$
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{p^2+p+1}\right)$.

EXERCICE 14. ♣/♢ – ●●○ *Parmi 7 réels...*
On se donne 7 réels $x_1, \dots, x_7$. Montrer qu'on peut trouver deux indices $1 \leq i \neq j \leq 7$ tels que

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3 Fonctions exponentielle et logarithme

EXERCICE 15. ◐○○ *Une équation avec des puissances*
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

EXERCICE 16. ◐○○ *Un produit infini*

1. Montrer que $\forall x > 0, x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$.

EXERCICE 17. ♢ – ●◐○ *L'exponentielle, comme somme d'une série*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'encadrement suivant :
$$\forall x \in [0, n], \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}.$$
2. Montrer que pour tout réel x, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.
3. En déduire la formule : $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

EXERCICE 18. ♣ – ●◐○ *Irrationalité de e*
Le but de l'exercice est de montrer que e est irrationnel. On rappelle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel a_n tel que
$$a_n < n!e < a_n + 1.$$
2. Conclure.

EXERCICE 19. ♢ – ●○○ *Irrationalité de* $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$
Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel. Généraliser.

EXERCICE 20. ●○○ *Étude de* $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

On définit f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Faire l'étude de f.
2. En déduire les couples $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, solutions de $a^b = b^a$.
3. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de solutions de l'équation $e^x = x^n$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer la valeur maximale de $\sqrt[n]{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 21. ♣/♢ – ●●○ *Inégalités de Young et Hölder*

Soit $p > 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $q > 1$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   On dit que q est l'exposant conjugué de p.

On fixe un tel couple $(p, q) \in]1, +\infty[^2$.

2. Montrer l'inégalité de Young :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$
3. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}, \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

4 Calcul différentiel

EXERCICE 22. ○○○ *Calcul de dérivées*

Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes. Puis calculer les dérivées :

1. $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + 1}$;
2. $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}$;
3. $f_3(x) = e^{-\frac{2}{x^2}}$;
4. $f_4(x) = \ln\left(2 + \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$;
5. $f_5(x) = \ln\Big(\ln\big(\ln x\big)\Big)$;
6. $f_6(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}\right)$;
7. $f_7(x) = x^{1/x}$;
8. $f_8(x) = \operatorname{ch} x \cos x + \operatorname{sh} x \sin x$.

EXERCICE 23. ♣/♢ – ●◐○ *Dérivées successives*

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x-a}$, où $a \in \mathbb{C}$;
2. $f_2(x) = \cos(3x)$;
3. $f_3(x) = x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $f_4(x) = e^x \cos x$;
5. $f_5(x) = \cos^3 x$;
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

EXERCICE 24. ●●○ *Dérivées successives de* arctan
On pose $f = \arctan$. Montrer que f est indéfiniment dérivable et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n\big(f(x)\big) \sin\Big(n\big(\pi/2 + f(x)\big)\Big).$$

EXERCICE 25. ♣/♢ – ●●◐ tan *est absolument monotone*
Une fonction est dite absolument monotone si elle est indéfiniment dérivable et que toutes ses dérivées sont positives. Montrer que tan est absolument monotone sur $[0, \pi/2[$.

Indications

Exercice 4. On pourra utiliser la densité des rationnels.

Exercice 6. Pour 2., raisonner par l'absurde et construire une succession d'intervalles emboîtés sur lesquels f_n serait très proche de 0 ou de 1.

Exercice 8. Utiliser le formulaire de trigonométrie pour faire apparaître des composées d'une fonction et de sa bijection réciproque. On ne dérivera qu'en dernier recours.

Exercice 10. Considérer $C_n \pm S_n$.

Exercice 12. Poser $u = \arctan x$ et $v = \arctan y$ et utiliser la formule d'addition de tangente. La valeur de k est obtenue par une disjonction de cas portant sur la valeur de $u + v$.

Exercice 14. Écrire les réels comme des tangentes d'angles.

Exercice 17. Pour 1., considérer les fonctions $f_n : x \mapsto e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ et $g_n : x \mapsto e^{-x}\Big(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \dfrac{x_n}{n!}\Big)$.

Exercice 19. On utilisera les résultats élémentaires d'arithmétique.

Exercice 21. Pour 3., on commencera par montrer l'inégalité dans le cas particulier où $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^p = 1$. Puis, on s'y ramènera en homogénéisant la formule à démontrer.

Exercice 23. Pour les calculs avec fonctions trigonométriques, on pourra penser complexes et linéarisation. Pour 6., factoriser $x^2 + 1$ en passant en complexe et décomposer la fraction.

Exercice 25. Calculer les premières dérivées et établir par récurrence la forme générale des dérivées supérieures.