

4 - Fonctions et calcul différentiel

Jeremy Daniel

Il [Kepler] eut dans ses dernières années l'avantage de voir naître et d'employer la découverte des logarithmes, due à Neper, baron écossais, artifice admirable [...] qui, en réduisant à quelques jours le travail de plusieurs mois, double, si l'on peut ainsi dire, la vie des astronomes et leur épargne les erreurs et les dégoûts inséparables des longs calculs.

Laplace, *Exposition du système du monde*

1 Fonctions de la variable réelle

On adopte un point de vue naïf sur les fonctions. En dehors des paragraphes sur les fonctions à valeurs complexes et sur les fonctions de deux variables, les fonctions considérées sont définies sur une partie de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

1.1 Vocabulaire général

DÉFINITION 1.1 (Ensemble de définition)

Déterminer l'ensemble de définition d'une expression $f(x)$, dépendant d'une variable réelle x , c'est déterminer pour quelles valeurs cette expression a un sens.

REMARQUE 1.2

Cette notion aura en fait peu d'importance. Souvent, on ne sera intéressé par la fonction que sur une partie de son ensemble de définition – qu'on appellera l'ensemble d'étude.

REMARQUE 1.3

Si f est une fonction et x un réel dans l'ensemble de définition de f , $f(x)$ est l'image de x par f . On tâchera de bien distinguer la fonction f du réel $f(x)$ – qui n'a de sens que si x

est spécifié.

On écrit aussi $(x \mapsto f(x))$ pour la fonction f ; mais dans cette écriture, la variable x est muette.

DÉFINITION 1.4 (Graphe d'une fonction)

La graphe, ou courbe représentative, de f est l'ensemble des couples $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$, où x varie dans l'ensemble de définition (ou ensemble d'étude) de f .

1.1.1 Monotonie

DÉFINITION 1.5 (Monotonie)

Sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle), on dit que

- f est croissante si $\forall x, y \in A, (x \leq y) \implies (f(x) \leq f(y))$;
- f est décroissante si $\forall x, y \in A, (x \leq y) \implies (f(x) \geq f(y))$;
- f est monotone si f est croissante ou décroissante.

Si dans la définition on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de stricte (dé)croissance.

PROPOSITION 1.6 (Équivalence dans les inégalités)

Si f est strictement croissante sur A , alors

$$\forall x, y \in A, (x \leq y) \iff (f(x) \leq f(y)).$$

PROPOSITION 1.7 (Monotonie et composition)

La composée de deux fonctions

- *de même monotonie est une fonction croissante ;*
- *de monotonie inverse est une fonction décroissante.*

PROPOSITION 1.8 (Croissance et produit)

Le produit de deux fonctions croissantes et positives est une fonction croissante.

ATTENTION !

C'est faux sans l'hypothèse de positivité. Considérer le produit de $x \mapsto x$ par elle même sur \mathbb{R}_- .

1.1.2 Parité

DÉFINITION 1.9 (Ensemble symétrique par rapport à 0)

Soit A une partie de \mathbb{R} . On dit que A est symétrique (par rapport à 0) si

$$\forall x \in A, -x \in A.$$

DÉFINITION 1.10 (Fonction paire/impair)

Si f est définie sur une partie symétrique A , on dit que f est

- paire si : $\forall x \in A, f(-x) = f(x)$;
- impaire si : $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.

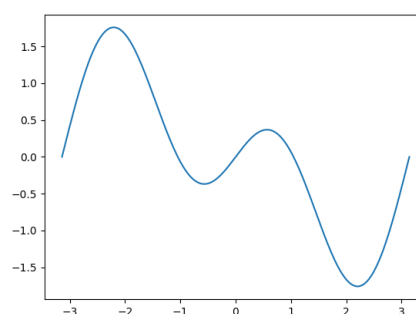
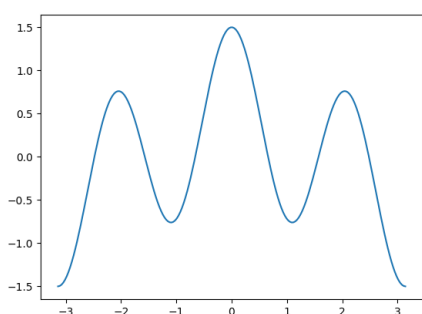
PROPOSITION 1.11 (Interprétation graphique)

Une fonction est

- paire ssi son graphe présente une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.
- impaire ssi son graphe présente une symétrie centrale par rapport à l'origine.

EXEMPLE 1.12

Deux exemples de fonctions paire et impaire.



PROPOSITION 1.13 (Parité et produit)

Un produit de fonctions

- de même parité est une fonction paire ;
- de parité opposée est une fonction impaire.

REMARQUE 1.14

Une combinaison linéaire de fonctions de même parité a aussi cette parité.

1.1.3 Transformations simples

PROPOSITION 1.15 (Transformations des courbes représentatives)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , de courbe représentative \mathcal{C}_f . Soit a un réel non nul. On considère les fonctions g_1, g_2, g_3 et g_4 définies sur \mathbb{R} par

$$g_1(x) = f(x + a) ; g_2(x) = f(x) + a ; g_3(x) = f(ax) ; g_4(x) = af(x),$$

de courbe représentative \mathcal{C}_{g_i} . Alors :

- \mathcal{C}_{g_1} est l'image de \mathcal{C}_f par la translation de vecteur $(-a, 0)$;
- \mathcal{C}_{g_2} est l'image de \mathcal{C}_f par la translation de vecteur $(0, a)$;
- \mathcal{C}_{g_3} est l'image de \mathcal{C}_f par la dilatation horizontale de rapport $1/a$;
- \mathcal{C}_{g_4} est l'image de \mathcal{C}_f par la dilatation verticale de rapport a .

REMARQUE 1.16

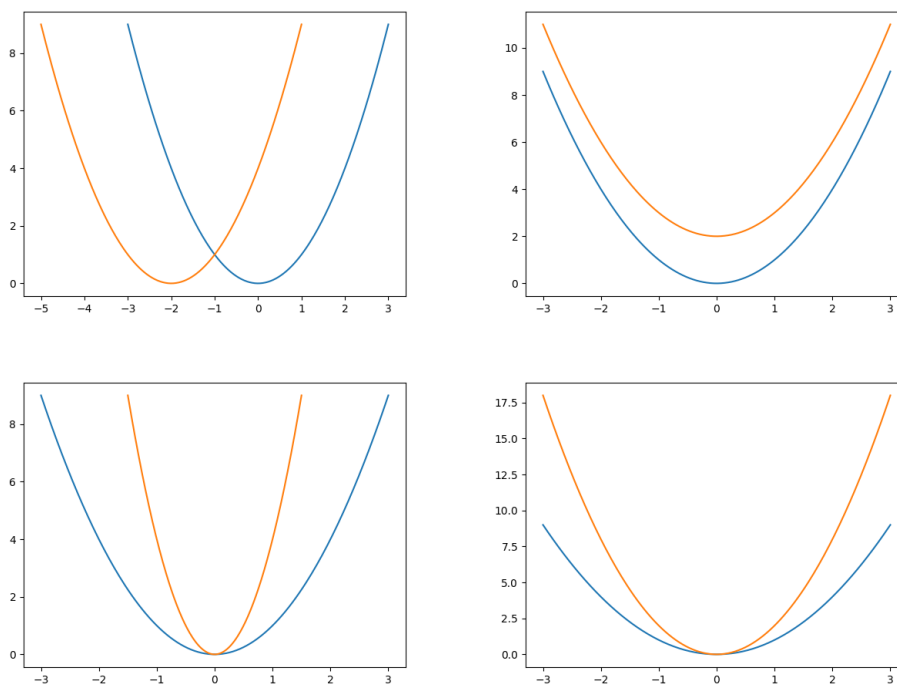
On appelle dilatation horizontale de rapport a l'application définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 par

$$(x, y) \mapsto (ax, y).$$

De même pour les dilatations verticales.

EXEMPLE 1.17

On prend $f : x \mapsto x^2$ et $a = 2$. En bleu, le graphe de f . En orange et dans le sens de la lecture, les graphes de $x \mapsto f(x + 2)$, $x \mapsto f(x) + 2$, $x \mapsto f(2x)$, $x \mapsto 2f(x)$.



1.1.4 Périodicité

DÉFINITION 1.18 (Ensemble T -périodique)

Soit A une partie de \mathbb{R} , soit $T > 0$. On dit que A est T -périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \iff x + T \in A.$$

ATTENTION !

Cela revient à demander que pour tout $x \in A$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $x + nT \in A$.

La partie \mathbb{R}_+ n'est pas 1-périodique.

DÉFINITION 1.19 (Fonction T -périodique)

Soit $T > 0$. Une fonction f définie sur partie T -périodique A est T -périodique si

$$\forall x \in A, f(x + T) = f(x).$$

ATTENTION !

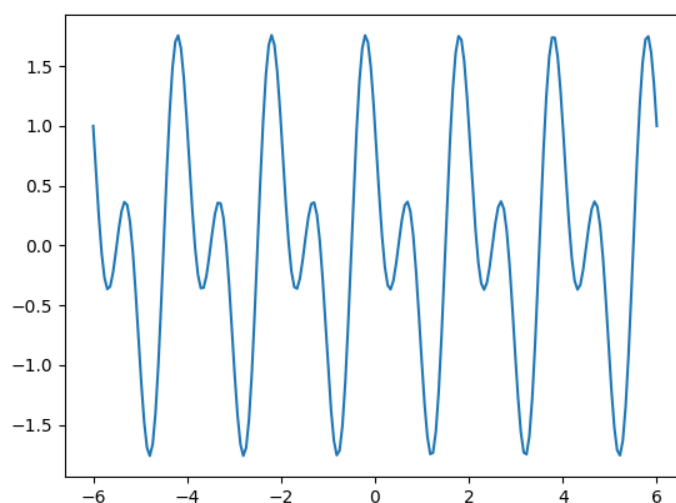
Une fonction T -périodique est aussi $2T$ -périodique, $3T$ -périodique... Inversement, on ne peut pas en toute généralité définir la *plus petite* période d'une fonction périodique.

PROPOSITION 1.20 (Interprétation graphique)

Une fonction est T -périodique ssi son graphe est stable par translation de vecteur $\vec{u} = (T, 0)$.

EXEMPLE 1.21

Un exemple de fonction 2-périodique entre -6 et 6 .



1.1.5 Bornes d'une fonction

DÉFINITION 1.22 (Fonction majorée, minorée, bornée)

Une fonction est dite majorée/minorée/bornée si l'ensemble de ses valeurs l'est.

PROPOSITION 1.23 (Caractérisation par la valeur absolue)

Une fonction f est bornée ssi $|f|$ est majorée.

DÉFINITION 1.24 (Maximum, minimum d'une fonction)

Soient m, M des réels.

- M est le maximum de f si c'est le maximum de l'ensemble des valeurs de f .
- m est le minimum de f si c'est le minimum de l'ensemble des valeurs de f .

ATTENTION !

En général, une fonction minorée/majorée n'a pas de minimum/maximum. Penser à exp sur \mathbb{R} .

1.1.6 Asymptotes

DÉFINITION 1.25 (Asymptote horizontale)

La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f , en $+\infty$, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

De même en $-\infty$.

DÉFINITION 1.26 (Asymptote verticale)

La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f , si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

DÉFINITION 1.27 (Asymptote oblique)

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f , en $+\infty$, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

De même en $-\infty$.

REMARQUE 1.28

Pour l'étude des asymptotes obliques en $+\infty$, on étudie dans un premier temps la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Si elle existe et est finie, on note a sa valeur ; puis on étudie la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

Si cette limite existe et est finie, on note b sa valeur. Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

1.1.7 Bijection

DÉFINITION 1.29 (Fonction bijective)

Soient A et B deux parties de \mathbb{R} , soit f une fonction définie sur A et à valeurs dans B . On dit que $f : A \rightarrow B$ est une bijection – ou est bijective – si tout élément de B admet un unique antécédent dans A par f .

DÉFINITION 1.30 (Bijection réciproque)

Dans ce cas, la fonction $g : B \rightarrow A$, associant à un élément $b \in B$ son unique antécédent par f , est la bijection réciproque de f . On la note f^{-1} .

1.2 Continuité et dérivabilité

DÉFINITION 1.31 (Continuité)

Une fonction f est continue sur A si

$$\forall a \in A, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

THÉORÈME 1.32 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

REMARQUE 1.33

On étend ce résultat au cas où f est définie sur un intervalle semi-ouvert, avec des bornes finies ou infinies. Dans ce cas, il faut remplacer $f(a)$ et $f(b)$ par $\lim_a f$ et $\lim_b f$ (sous réserve que ces limites existent).

DÉFINITION 1.34 (Dérivabilité en un point)

Une fonction f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

DÉFINITION 1.35 (Nombre dérivé en un point)

Cette limite est le nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$.

DÉFINITION 1.36 (Dérivée d'une fonction)

Une fonction f est dérivable sur A si elle est dérivable en tout point de A .

La dérivée de f , notée f' , est alors définie sur A , par $f' : x \mapsto f'(x)$.

THÉORÈME 1.37 (Développement limité à l'ordre 1)

Soit f une fonction définie sur A et dérivable en $a \in A$. Alors, si $x \in A$ est proche de a ,

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x - a).$$

Plus précisément, il existe une fonction $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\forall x \in A, f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a).$$

REMARQUE 1.38

De façon équivalente, si h est petit :

$$f(x + h) \cong f(x) + hf'(x).$$

En sciences physiques, on noterait plutôt h comme un infinitésimal dx . L'infinitésimal df vaut par définition $f(x + dx) - f(x)$ et $df = \frac{df}{dx} dx$.

DÉFINITION 1.39 (Tangente)

Soit f une fonction dérivable en a . La tangente à la courbe représentative de f en a est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

REMARQUE 1.40

C'est la droite qui approche le mieux la courbe représentative de f , en des abscisses proches de a .

THÉORÈME 1.41 (Signe de la dérivée et variations)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est nulle, alors f est constante ;
- Si $f' \geq 0$, alors f est croissante ;
- Si $f' \leq 0$, alors f est décroissante.

Si de plus, l'inégalité $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) est stricte, sauf peut-être en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).

EXEMPLE 1.42

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \leq x.$$

En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

PROPOSITION 1.43 (Calcul de dérivées)

Soient f et g deux fonctions dérivables. Soit λ un réel. Là où les formules ont un sens, on a :

fonction	λf	$f + g$	fg	$1/f$	f/g	$g \circ f$
dérivée	$\lambda f'$	$f' + g'$	$f'g + fg'$	$-f'/f^2$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	$f' \times g' \circ f$

EXEMPLE 1.44

Dérivée de $\exp \circ f$, $\cos \circ f$, f^n ($n \in \mathbb{N}$).

THÉORÈME 1.45 (Dérivée de la bijection réciproque)

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective et dérivable. Alors, f^{-1} est dérivable en $b \in J$ ssi $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Dans ce cas, $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

En particulier, si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J , de dérivée :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

DÉFINITION 1.46 (Fonction de classe \mathcal{C}^1)

Une fonction f est de classe \mathcal{C}^1 si elle est dérivable et si sa dérivée f' est continue.

DÉFINITION 1.47 (Dérivées d'ordre supérieur)

Soit f une fonction. On définit récursivement les dérivées d'ordre supérieur de f , notées $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$:

- $f^{(0)} = f$;
- Si $f^{(k)}$ existe et est dérivable, $f^{(k+1)}$ est défini comme $(f^{(k)})'$.

1.3 Plan d'étude d'une fonction

MÉTHODE 1.48

Si on doit étudier une fonction f , sans objectif particulier, on suivra les étapes suivantes :

- **Détermination de l'ensemble de définition \mathcal{D}_f .** Quand la fonction est donnée par une formule ; en pratique, on résout des (in)équations.
- **Étude des symétries.** On étudie si la fonction est paire/impaire et/ou si elle a une période.
- **Réduction du domaine d'étude.** Une fonction paire/impaire peut être étudiée seulement sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$. Une fonction T -périodique sur $\mathcal{D}_f \cap [0, T]$ ou $\mathcal{D}_f \cap [-T/2, T/2]$. Une fonction à la fois paire/impaire et T -périodique s'étudie sur $\mathcal{D}_f \cap [0, T/2]$. Le reste s'en déduit en utilisant les symétries.
- **Étude des variations.** Le plus souvent, en calculant la dérivée et en étudiant son signe.
- **Calcul des valeurs particulières, des limites.** Toutes les limites aux bornes de l'ensemble d'étude. Les valeurs de la fonction (et éventuellement de sa dérivée) en des points remarquables.
- **Tracé de la courbe.** Le plus simplement possible, en accord avec les informations recueillies lors des étapes précédentes. On trace les asymptotes à la courbe, éventuellement les tangentes en les points remarquables.

EXERCICE 1.49

Faire l'étude des fonctions $f : x \mapsto x^{-\ln x}$ et $g : x \mapsto \frac{\sin x}{1 + \sin x}$.

1.4 Extension aux fonctions à valeurs complexes

DÉFINITION 1.50 (Partie réelle, partie imaginaire et module d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{C} .

- La partie réelle de f , notée $\operatorname{Re} f$ est la fonction $x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$;
- La partie imaginaire de f , notée $\operatorname{Im} f$, est la fonction $x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$;
- Le module de f , noté $|f|$ est la fonction $x \mapsto |f(x)|$.

DÉFINITION 1.51 (Fonction paire, impaire, T -périodique, bornée)

Une fonction f à valeurs complexes est paire/impaire/ T -périodique/bornée si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

PROPOSITION 1.52 (Caractérisation des fonctions bornées)

Une fonction f à valeurs complexes est bornée ssi son module est une fonction majorée.

DÉFINITION 1.53 (Fonction continue, dérivable)

Une fonction f à valeurs complexes est continue/dérivable si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

DÉFINITION 1.54 (Fonction dérivée)

Soit f une fonction à valeurs complexes. Si f est dérivable, sa dérivée f' est définie par

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x).$$

PROPOSITION 1.55 (Calcul de dérivées)

Les règles de calcul sur les dérivées restent valables.

PROPOSITION 1.56 (Cas particulier de l'exponentielle)

Soit I un intervalle. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors, $\exp \circ \gamma$ est dérivable et

$$\forall t \in I, (\exp \circ \gamma)'(t) = \gamma'(t) \exp(\gamma(t)).$$

REMARQUE 1.57

On ne considère pas de fonctions définies sur une partie de \mathbb{C} , dont l'étude est bien plus délicate...

1.5 Fonctions de deux variables

DÉFINITION 1.58 (Applications partielles)

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie A de \mathbb{R}^2 .

- Si $y_0 \in \mathbb{R}$ est fixé, la première application partielle de f , avec $y = y_0$, est $x \mapsto f(x, y_0)$.
On la note f_{1,y_0} .
- Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est fixé, la deuxième application partielle de f , avec $x = x_0$, est $y \mapsto f(x_0, y)$.
On la note f_{2,x_0} .

DÉFINITION 1.59 (Dérivées partielles)

Soit (x_0, y_0) un point de A . Quand ces quantités sont bien définies, on note

- $\partial_1 f(x_0, y_0) = (f_{1,y_0})'(x_0)$;
- $\partial_2 f(x_0, y_0) = (f_{2,x_0})'(y_0)$.

On définit ainsi deux nouvelles fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sur (une partie de) A .

REMARQUE 1.60 (Notations en sciences physiques)

Si f dépend de deux variables x et y , on note plutôt $\partial_x f$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ la première dérivée partielle de f ; de même $\partial_y f$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}$ la deuxième.

Ces notations sont commodes mais recèlent quelques pièges.

PROPOSITION 1.61 (Développement limité à l'ordre 1)

Soit f définie sur une partie A de \mathbb{R}^2 . Soit (x_0, y_0) un point de A . Si les quantités sont bien définies, on a

$$f(x, y) \cong f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_1 f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_2 f(x_0, y_0),$$

si x est proche de x_0 et y est proche de y_0 .

REMARQUE 1.62

De façon équivalente, si h et k sont petits :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \cong f(x_0, y_0) + h\partial_1 f(x_0, y_0) + k\partial_2 f(x_0, y_0).$$

REMARQUE 1.63 (Notations en sciences physiques)

En utilisant des infinitésimaux dx et dy au lieu de h et k , on peut encore écrire :

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

En notant $df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$ l'infinitésimal associé à la quantité f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

ATTENTION !

Considérons une situation physique dans laquelle la température dépend de la position et du temps. On a donc une quantité $T(x, t)$. Supposons que la position occupée par un objet ponctuel dépende elle aussi du temps ; on écrit $x(t)$ pour cette position. A l'instant t , la température de l'objet est donc $T(x(t), t)$.

Il y a deux façons de comprendre la dérivée de T par rapport au temps t :

– la deuxième dérivée partielle de T : $\partial_2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$;

– la dérivée de la fonction (d'une variable) $f : t \mapsto T(x(t), t)$. On l'écrit $\frac{dT}{dt}$ et on l'appelle dérivée totale de T par rapport à t .

Une application de la règle de la chaîne montrera la relation :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonctions puissance

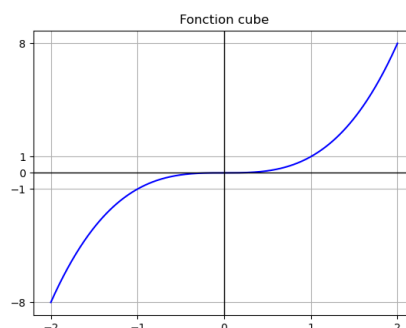
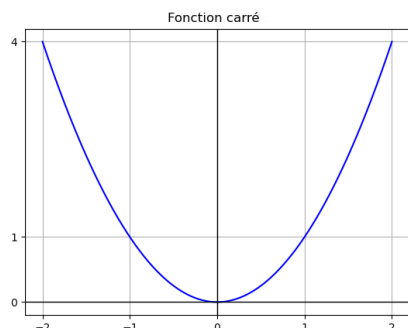
PROPOSITION 2.1 (Fonctions puissance, exposant positif)

Soit $n > 0$ un entier ; notons f_n la fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $x \mapsto x^n$.

- Si n est pair, f_n est paire, strictement décroissante sur \mathbb{R}_- , croissante sur \mathbb{R}_+ , de limite $+\infty$ en $\pm\infty$. Son image est \mathbb{R}_+ .
- Si n est impair, f_n est impaire, strictement croissante sur \mathbb{R} , de limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$. Son image est \mathbb{R} .

EXEMPLE 2.2

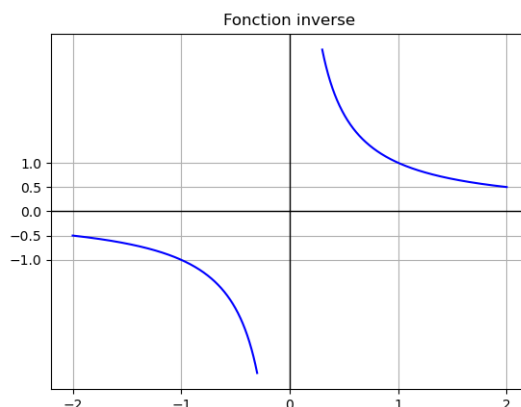
Pour $n = 2$ et $n = 3$:



DÉFINITION 2.3 (Fonction inverse)

On considère f la fonction définie de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R}^* , par $f(x) = x^{-1} = 1/x$.

C'est une fonction impaire, strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* , de limites 0 en $\pm\infty$ et 0^\pm en $\pm\infty$. C'est une involution : composée avec elle-même, on obtient la fonction identité $x \mapsto x$ (sur \mathbb{R}^*).



REMARQUE 2.4

On étudie plus généralement les fonctions puissance $x \mapsto x^n$, pour $n < 0$.

PROPOSITION 2.5 (Dérivée)

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

REMARQUE 2.6

La formule est aussi valable sur \mathbb{R}^* pour les exposants négatifs.

2.2 Fonctions polynomiales et fonctions rationnelles

DÉFINITION 2.7 (Fonction polynomiale)

Une fonction polynomiale est une fonction de la forme

$$p : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ x & \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d, \end{cases}$$

où a_0, \dots, a_d sont des réels (ou des complexes).

THÉORÈME 2.8 (Principe d'identification des coefficients)

Soient $\underline{a} = (a_0, \dots, a_d)$ et $\underline{b} = (b_0, \dots, b_{d'})$ deux familles de nombres réels ou complexes, avec $a_d \neq 0$ et $b_{d'} \neq 0$. On note p_a et p_b les fonctions polynomiales définies par

$$p_a(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k \text{ et } p_b(x) = \sum_{k=0}^{d'} b_k x^k.$$

Si $p_a = p_b$, alors $d = d'$ et $\underline{a} = \underline{b}$.

DÉFINITION 2.9

Si $p : x \mapsto \sum_{k=0}^d a_k x^k$ est une fonction polynomiale, avec $a_d \neq 0$, on dit que d est le degré de p , a_d est le coefficient dominant de p et a_0 est le coefficient constant de p .

REMARQUE 2.10

Par convention, la fonction nulle est de degré $-\infty$.

DÉFINITION 2.11 (Fonction rationnelle)

Une fonction rationnelle est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)},$$

où p et q sont deux fonctions polynomiales ($q \neq 0$); ici, f est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

2.3 Fonctions exponentielle, logarithme et puissances généralisées

2.3.1 Fonction exponentielle

DÉFINITION 2.12 (Fonction exponentielle)

La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'unique fonction y dérivable, solution de $y' = y$ et $y(0) = 1$.

NOTATION 2.13 ($\exp(x) = e^x$)

On note e^x ou $\exp(x)$ l'image de x par la fonction \exp .

PROPOSITION 2.14 (Règles de calcul)

Soient x, y deux réels, soit $n \in \mathbb{Z}$.

- $e^{x+y} = e^x e^y$;
- $(e^x)^{-1} = e^{-x}$;
- $(e^x)^n = e^{nx}$.

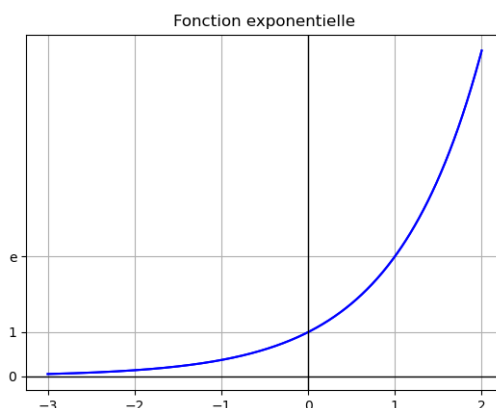
LEMME 2.15 ($\exp(x) \geq 1 + x$)

On a l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x.$$

COROLLAIRE 2.16 (Allure de \exp)

La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* . Sa limite en $-\infty$ vaut 0, celle en $+\infty$ vaut $+\infty$.



REMARQUE 2.17 (Valeur approchée de e)

On retiendra que $e = e^1 \cong 2,7$.

2.3.2 Fonction logarithme

DÉFINITION 2.18 (Fonction logarithme)

La fonction logarithme, notée \ln , est la bijection réciproque de \exp .

PROPOSITION 2.19 (Règles de calcul)

Soient $x, y > 0$, soit $n \in \mathbb{Z}$.

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
- $\ln(1/x) = -\ln x$;
- $\ln(x^n) = n \ln x$.

PROPOSITION 2.20 (Dérivée)

La fonction \ln est dérivable, de dérivée $x \mapsto 1/x$ (sur \mathbb{R}_+^*).

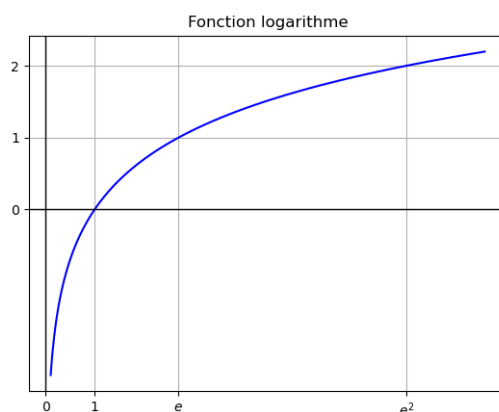
LEMME 2.21 ($\ln(1+x) \leq x$)

On a l'inégalité suivante :

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x.$$

PROPOSITION 2.22 (Allure de \ln)

La fonction \ln est strictement croissante de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} . Elle a pour limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$.



REMARQUE 2.23

On retiendra que $\ln 2 \cong 0,7$.

2.3.3 Puissances généralisées

DÉFINITION 2.24 (Notation b^a)

Soient $b > 0$, $a \in \mathbb{R}$. On définit $b^a = \exp(a \ln b)$.

DÉFINITION 2.25 (Exponentielle de base b)

Soit $b > 0$. La fonction exponentielle de base b , notée \exp_b est définie sur \mathbb{R} par

$$\exp_b : x \mapsto b^x.$$

PROPOSITION 2.26 (Réciproque de \exp_b)

Soit $b > 0$. La fonction \exp_b est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* . Sa bijection réciproque est donnée par

$$\log_b : y \mapsto \frac{\ln y}{\ln b}.$$

DÉFINITION 2.27 (Logarithme de base b)

$\log_b : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction logarithme de base b .

REMARQUE 2.28

En dehors de la base e , on utilise le plus souvent la base 10 (en chimie) et la base 2 (en informatique).

PROPOSITION 2.29 (\log_{10} et nombre de chiffres dans l'écriture décimale)

Soit $x > 0$. On a

$$n = \lfloor \log_{10} x \rfloor \iff 10^n \leq x < 10^{n+1}.$$

En particulier, si $x \geq 1$, $\lfloor \log_{10} x \rfloor + 1$ est le nombre de chiffres avant la virgule dans l'écriture décimale de x .

DÉFINITION 2.30 (Fonctions puissance généralisées)

Les fonctions puissance généralisées sont les fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* , et de la forme $x \mapsto x^a$, où a est un réel fixé.

REMARQUE 2.31

Si $a > 0$, on convient de prolonger cette fonction en 0 par la valeur 0.

PROPOSITION 2.32 (Règles de calcul)

Soient $x, y > 0$, soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a

- $(xy)^a = x^a y^a$;
- $x^{a+b} = x^a x^b$;
- $(x^a)^b = x^{ab}$.

PROPOSITION 2.33 (Dérivée)

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$.

NOTATION 2.34 (Fonction racine n -ème)

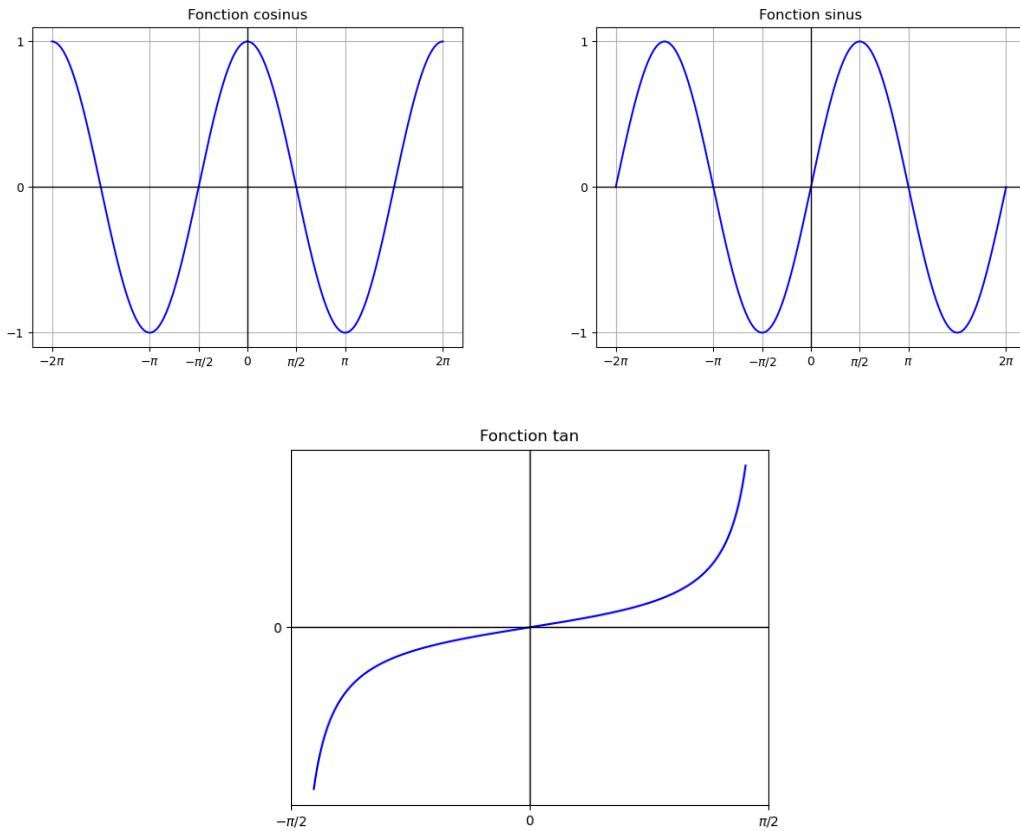
Si $a = 1/n$ est l'inverse d'un entier naturel non nul, on note encore $\sqrt[n]{x}$ pour $x^{1/n}$. La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la bijection réciproque de $x \mapsto x^n$ (toutes deux vues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+).

2.4 Trigonométrie

2.4.1 Fonctions circulaires

REMARQUE 2.35

Les définitions et principales propriétés des fonctions cos, sin, tan et cotan ont été vues précédemment. S'y reporter.



LEMME 2.36 ($\cos'(0) = 0$ et $\sin'(0) = 1$)

Les fonctions \cos et \sin sont dérivables en 0. On a $\cos'(0) = 0$ et $\sin'(0) = 1$.

COROLLAIRE 2.37 (Dérivées des fonctions circulaires)

Les fonctions \cos , \sin , \tan et \cotan sont dérivables sur leur intervalle de définition. On a :

$$\cos' = -\sin ; \sin' = \cos ; \tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} ; \cotan' = -\frac{1}{\sin^2} = -(1 + \cotan^2).$$

2.4.2 Fonctions circulaires réciproques

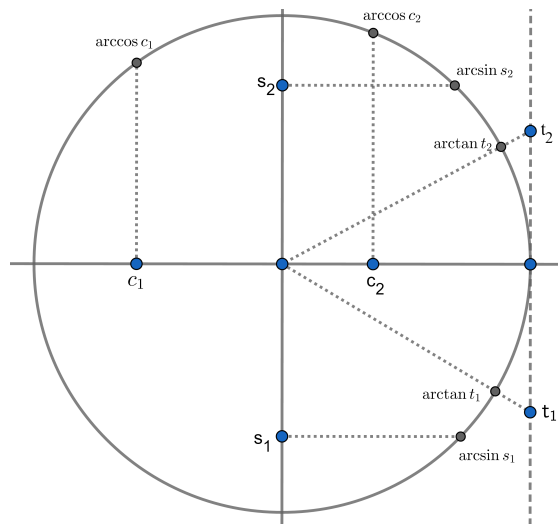
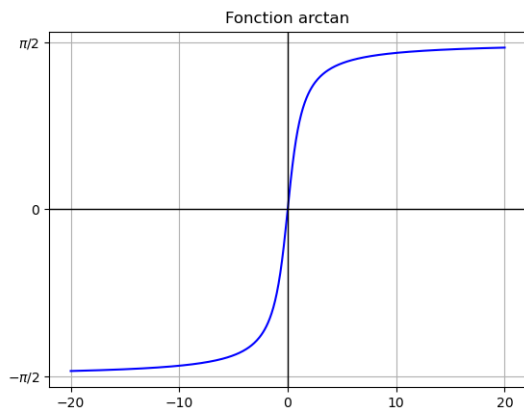
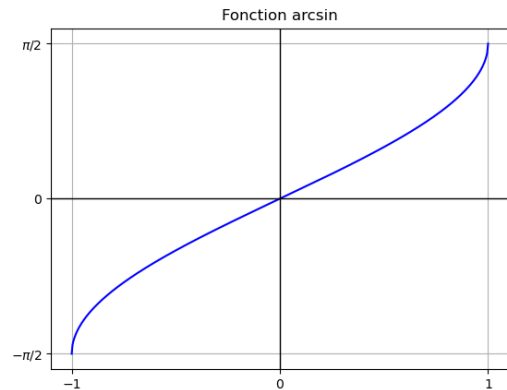
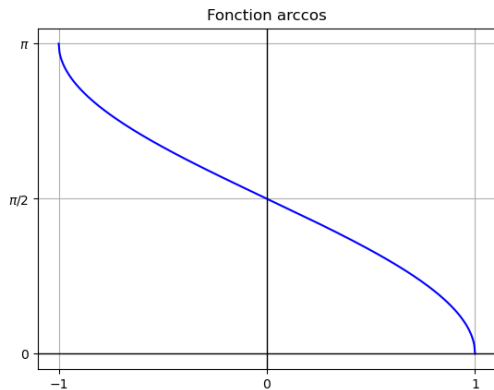
THÉORÈME 2.38 (Domaines de bijectivité des fonctions circulaires)

On dispose des bijections suivantes :

- $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est une bijection strictement décroissante ;
- $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ est une bijection strictement croissante ;
- $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante.

DÉFINITION 2.39 (Fonctions circulaires réciproques)

On définit $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ et $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ comme les bijections réciproques des fonctions considérées ci-dessus.



PROPOSITION 2.40 (Relations)

On a les formules suivantes :

- $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$;
- $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$;
- $\forall x < 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = -\pi/2$.

PROPOSITION 2.41 (Dérivées)

Les fonctions arccos et arcsin sont dérivables sur $]1, 1[$ et arctan sur \mathbb{R} . On a :

- $\forall x \in]-1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2.5 Trigonométrie hyperbolique

DÉFINITION 2.42 (Fonctions hyperboliques)

On définit sur \mathbb{R} les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques, notées ch, sh et th

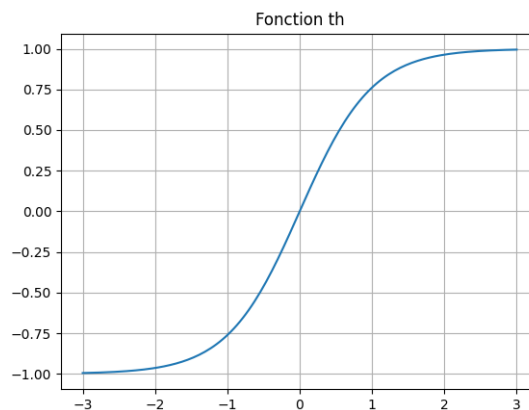
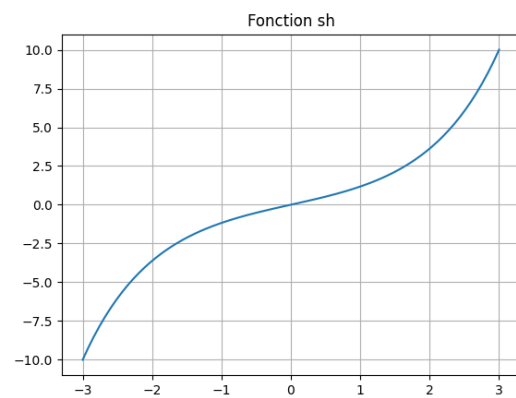
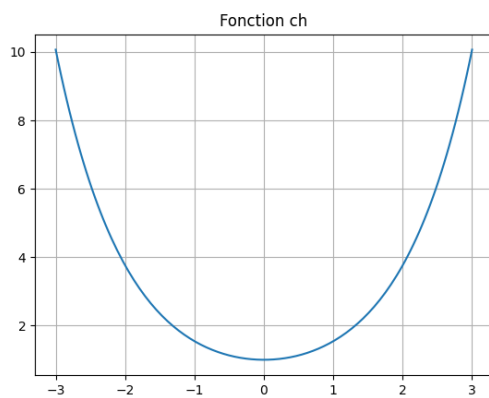
par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

PROPOSITION 2.43 (Étude des fonctions)

On a les propriétés suivantes :

- ch est paire, strictement décroissante sur \mathbb{R}_- , strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , avec limites $+\infty$ en $\pm\infty$;
- sh est impaire, strictement croissante sur \mathbb{R} , avec limites $\pm\infty$ en $\pm\infty$;
- th est impaire, strictement croissante sur \mathbb{R} , avec limites ± 1 en $\pm\infty$.



PROPOSITION 2.44 (Dérivées)

Les fonctions trigonométriques hyperboliques sont dérivables sur \mathbb{R} et

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}; \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}; \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

PROPOSITION 2.45 (Relation fondamentale)

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

REMARQUE 2.46

On pourrait obtenir des formules analogues aux formules de trigonométrie circulaire pour la trigonométrie hyperbolique. En effet, tout peut se déduire formellement des propriétés de la fonction exponentielle.

THÉORÈME 2.47 (Domaine de bijectivité des fonctions hyperbolique)

On dispose des bijections strictement croissantes suivantes :

- $\text{ch} : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$;
- $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$.

DÉFINITION 2.48 (Fonctions hyperboliques réciproques (HP))

On définit les fonctions $\text{argch} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$, $\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\text{argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ comme les bijections réciproques des fonctions considérées ci-dessus.

PROPOSITION 2.49 (Dérivée)

Les fonctions hyperboliques réciproques sont dérivables sur leur ensemble de définition – sauf argch : seulement sur $]1, +\infty[$. On a :

- $\forall x > 1, \text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$;
- $\forall x \in]-1, 1[, \text{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$.

PROPOSITION 2.50 (Expression élémentaire des fonctions hyperboliques réciproques)

Les fonctions hyperboliques réciproques sont exprimables de façon élémentaire :

- $\forall x \geq 1, \text{argch}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$;
- $\forall x \in]-1, 1[, \text{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

3 Introduction à l'analyse asymptotique

Les fonctions sont à valeurs dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} .

3.1 Fonctions équivalentes

DÉFINITION 3.1 (Fonction définie au voisinage de a)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Une fonction f est définie au voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est définie sur $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, sauf peut-être en a .

- Une fonction f est définie au voisinage de $+\infty$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f est définie sur $[M, +\infty[$.
- De même avec $-\infty$.

REMARQUE 3.2

On pourrait ne s'intéresser qu'aux fonctions définies au voisinage à gauche/à droite d'un réel a .

DÉFINITION 3.3 (Fonctions équivalentes)

Soit a un réel ou $\pm\infty$. Soient f, g deux fonctions définies sur un voisinage de a . On suppose que le quotient $\frac{f}{g}$ est bien défini sur un voisinage de a .

On dit que les fonctions f et g sont équivalentes en a , et on écrit $f \sim_a g$ ou $f(x) \sim g(x)$ quand $x \rightarrow a$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

PROPOSITION 3.4

Si deux fonctions f et g sont équivalentes en a et si f a une limite ℓ en a , alors g aussi a limite ℓ en a .

PROPOSITION 3.5 (Équivalent et limite)

Si ℓ est un réel non nul, alors $f \sim_a \ell$ ssi $\lim_a f = \ell$.

ATTENTION !

Avec la définition retenue, une fonction n'est *jamais* équivalente à 0.

EXEMPLE 3.6

Si $p : x \mapsto \sum_{k=0}^d a_k x^k$ est une application polynomiale (avec $a_d \neq 0$), on a $p(x) \sim a_d x^d$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Si $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ est une fraction rationnelle, avec $p(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$, $q(x) = \sum_{\ell=0}^{d'} b_\ell x^\ell$ ($a_d \neq 0$, $b_{d'} \neq 0$), alors $f(x) \sim \frac{a_d}{b_{d'}} x^{d-d'}$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

THÉORÈME 3.7 (Dérivée et équivalent)

Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$, telle que $f'(a) \neq 0$. Alors,

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a) \text{ quand } x \rightarrow a.$$

EXEMPLE 3.8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Quand $x \rightarrow 0$:

- $e^x - 1 \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $\sin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
- $\text{Arcsin } x \sim x$

MÉTHODE 3.9

Quelques règles de calcul avec les équivalents.

- On ne fait pas de somme/de différence d'équivalents.
Considérer la différence de $\ln(1+x) \sim x$ et $\sin x \sim x$.
- On peut faire le produit/le quotient d'équivalents et passer un équivalent à une puissance réelle fixe.
- On ne post-compose pas un équivalent avec une fonction.
Considérer $x \sim x+1$ en $+\infty$; on n'a pas $e^x \sim e^{x+1}$ en $+\infty$.
- On peut substituer une expression dans un équivalent. Plus précisément, on suppose que $g_1(y) \sim g_2(y)$ quand $y \rightarrow b$. On considère une fonction f telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.
Alors, $g_1(f(x)) \sim g_2(f(x))$ quand $x \rightarrow a$.

EXERCICE 3.10

Déterminer un équivalent de $\cos x - 1$ quand $x \rightarrow 0$.

Déterminer un équivalent de $\sin(2 \ln(1+x)(e^x - 1))$ quand $x \rightarrow 0$.

3.2 Fonctions négligeables

DÉFINITION 3.11 (Fonction négligeable)

Soit a un réel ou $\pm\infty$. Soient f, g deux fonctions définies sur un voisinage de a . On suppose que le quotient $\frac{f}{g}$ est bien défini sur un voisinage de a .

On dit que f est négligeable devant g en a et on écrit $f = o(g)$ en a ou $f(x) = o(g(x))$ quand $x \rightarrow a$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

REMARQUE 3.12

On a $f + g \sim f$ en a ssi $g = o(f)$.

REMARQUE 3.13

On peut substituer dans un o . Si $g_1(y) = o(g_2(y))$ quand $y \rightarrow b$ et si f est telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors, $g_1(f(x)) = o(g_2(f(x)))$ quand $x \rightarrow a$.

PROPOSITION 3.14 (Croissances comparées)

Soit $a > 0$, soit $b > 0$.

- En $+\infty$: $(\ln x)^b = o(x^a)$ et $x^b = o(e^{ax})$.
- En 0 : $|\ln x|^b = o(x^{-a})$.

– En $-\infty$: $e^{ax} = o(|x|^{-b})$.

ATTENTION !

Si $0 \leq a_1 < a_2$, alors $x^{a_1} = o(x^{a_2})$ en $+\infty$ mais $x^{a_2} = o(x^{a_1})$ en 0.