

## Semaine 3 - Fonctions de la variable réelle

### 1 Généralités sur les fonctions

#### 1.1 Vocabulaire

- Monotonie, parité, périodicité
- Graphe d'une fonction obtenue à partir d'une autre par une transformation simple
- Majorant, minorant, maximum, minimum.
- Une fonction est bornée ssi sa valeur absolue est majorée.
- Asymptotes horizontales, verticales, obliques

#### 1.2 Continuité, dérivabilité

- Théorème des valeurs intermédiaires, généralisé au cas d'intervalles (semi-)ouverts
- Nombre dérivé, fonction dérivée, développement limité à l'ordre 1, tangente
- Signe de la dérivée et variations sur un intervalle
- Dérivée d'une bijection réciproque
- Dérivées d'ordre supérieur, fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .  
*La formule de Leibnitz est hors programme.*

#### 1.3 Fonctions de deux variables

*Introduction brève, pour faire le lien avec les sciences physiques.*

- Applications partielles d'une fonction de deux variables
- Dérivées partielles
- Développement limité à l'ordre 1

#### 1.4 Fonctions à valeurs complexes

- Partie réelle, partie imaginaire, module d'une fonction à valeurs complexes
- Parité, périodicité, fonction bornée
- Une fonction est bornée ssi son module est une fonction majorée
- Continuité, dérivabilité, règles de calcul
- Dérivée de  $\exp \circ \gamma$ , où  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$

## 1.5 Plan d'étude d'une fonction

1. Domaine de définition
2. Étude des symétries
3. Réduction du domaine d'études
4. Calcul des variations
5. Calcul des limites et valeurs particulières
6. Tracé de la courbe. On fait figurer les asymptotes, éventuellement des valeurs et tangentes particulières

## 2 Fonctions usuelles

- Fonctions puissances  $x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Dérivée  $k$ -ème
- Fonctions polynomiales. Principe d'identification des coefficients : deux fonctions polynomiales égales ont des coefficients égaux.
- Fonctions rationnelles.
- Fonctions exponentielle et logarithme. Valeur approchée de  $e$  et  $\ln 2$ . Notation  $b^a$ . Fonctions exponentielles et logarithme de base  $b$ ; nombre de chiffres dans l'écriture décimale. Fonctions puissances généralisées  $x \mapsto x^a$ ,  $a$  réel. Dérivée. Notation  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ .
- Fonctions trigonométriques circulaires. Dérivées (le reste a été vu précédemment)
- Domaine de bijectivité de  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\tan$ . Définition de  $\arccos$ ,  $\arcsin$ ,  $\arctan$ . Graphes. Dérivées. Relations  $\arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$  et  $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \operatorname{sgn}(x)\pi/2$ .
- Fonctions hyperboliques  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$  et  $\operatorname{th}$ . Graphes. Dérivées. Relation fondamentale  $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ .
- Trigonométrie hyperbolique réciproque (HP). Définition de  $\operatorname{argch}$ ,  $\operatorname{argsh}$  et  $\operatorname{argth}$ . Dérivée et formules.

## 3 Exemples de questions de cours

- Définition d'une notion sur les fonctions
- Une étude de fonction
- Démonstration d'inégalités par étude de fonction
- Dérivée d'une fonction obtenue comme bijection réciproque (avec le calcul)
- Allure graphique d'une fonction usuelle
- Formule de trigonométrie circulaire et circulaire réciproque
- Définition des fonctions hyperboliques