

DM 4 - Théorème de Dirichlet et valeurs paires de  $\zeta$  – Corrigé**1 Théorème de Dirichlet****1.1 Noyau de Dirichlet**

1. Pour tout  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ , la fonction  $x \mapsto e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$  est  $2\pi$ -périodique et continue.

Il en est donc de même de  $D_n : x \mapsto \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $D_n(-x) = \sum_{k=-n}^n e^{ik(-x)} = \sum_{\ell=-n}^n e^{i\ell x} = D_n(x)$ , donc  $D_n$  est paire.

2.  $\int_0^1 D_n(2\pi t) dt = \sum_{k=-n}^n \int_0^1 e^{2ik\pi t} dt$ . Pour  $k = 0$ , la fonction intégrée est constante égale à 1, donc l'intégrale vaut 1. Pour  $k \neq 0$ ,

$$\int_0^1 e^{2i\pi kt} dt = \left[ \frac{e^{2i\pi kt}}{2i\pi k} \right]_0^1 = 1 - 1 = 0.$$

D'où  $\int_0^1 D_n(2\pi t) dt = 1$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On peut écrire

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n (e^{ix})^k.$$

C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $e^{ix}$ .

Si  $x$  est un multiple entier de  $2\pi$ , chaque terme vaut 1 et  $D_n(x) = 2n + 1$ .

Sinon,

$$\begin{aligned} D_n(x) &= e^{i(-n)x} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= e^{-inx} \frac{e^{i(n+1/2)x} \times 2i \sin\left((n+1/2)x\right)}{e^{ix/2} \times 2i \sin(x/2)} \\ &= \frac{\sin\left((n+1/2)x\right)}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

## 1.2 Théorème de Dirichlet

4. On a

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{k=-n}^n \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt \\ &= \int_0^1 f(t) \left( \sum_{k=-n}^n e^{-2i\pi kt} \right) dt \\ &= \int_0^1 f(t) D_n(-2\pi t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) D_n(2\pi t) dt, \end{aligned}$$

par parité de  $D_n$ .

Pour la deuxième égalité, on commence par couper l'intégrale en deux, par relation de Chasles :

$$S_n(f) = \int_0^{1/2} f(t) D_n(2\pi t) dt + \int_{1/2}^1 f(t) D_n(2\pi t) dt.$$

Par changement de variable  $u = 1 - t$ , la deuxième intégrale vaut

$$\int_{1/2}^0 f(1-u) D_n(2\pi(1-u)) (-du) = \int_0^{1/2} f(1-u) D_n(2\pi(1-u)) du.$$

Or, par parité et  $2\pi$ -périodicité,  $D_n(2\pi(1-u)) = D_n(-2\pi u) = D_n(2\pi u)$ . Donc,

$$S_n(f) = \int_0^{1/2} f(t) D_n(2\pi t) dt + \int_0^{1/2} f(1-t) D_n(2\pi t) dt = \int_0^{1/2} (f(t) + f(1-t)) D_n(2\pi t) dt.$$

5. En utilisant la deuxième égalité de la question précédente, le membre de droite vaut

$$\int_0^{1/2} (f(0) + f(1)) D_n(2\pi t) dt - S_n(f) = 2f(0) \int_0^{1/2} D_n(2\pi t) dt - S_n(f),$$

car  $f(0) = f(1)$ .

Or, par parité et  $2\pi$ -périodicité,

$$\int_0^{1/2} D_n(2\pi t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} D_n(2\pi t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 D_n(2\pi t) dt = \frac{1}{2}.$$

D'où l'égalité :

$$f(0) - S_n(f) = \int_0^{1/2} (f(0) - f(t) + f(1) - f(1-t)) D_n(2\pi t) dt.$$

6. Soit  $t \in ]0, 1/2[$ . On réécrit  $h(t)$  sous la forme

$$h(t) = \frac{-\frac{f(t)-f(0)}{t} + \frac{f(1)-f(1-t)}{t}}{\pi \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}}.$$

Chacune des petites fractions est un taux d'accroissement, dont la limite en 0 est connue. Par opérations élémentaires sur les limites, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \frac{-f'(0) + f'(1)}{\pi}.$$

En définissant  $\tilde{h}$  comme la fonction égale à  $h$  sur  $]0, 1/2[$  et prenant cette valeur limite en 0,  $\tilde{h}$  est bien un prolongement continu de  $h$  à  $[0, \pi/2]$ .

7. Par la question 3, les fonctions définies sur  $[0, 1/2]$  par

$$t \mapsto (f(0) - f(t) + f(1) - f(1-t))D_n(2\pi t) \text{ et } t \mapsto \tilde{h}(t) \sin((2n+1)\pi t)$$

sont égales (elles valent toutes deux 0 en 0). Donc, leur intégrale sur  $[0, 1/2]$  aussi. Par la question 5, cela donne l'égalité souhaitée.

8. La fonction  $t \mapsto h(t) \sin((2n+1)\pi t)$  est continue sur  $[0, 1/2]$ , par produit de fonctions continues.

Elle y est donc bornée. On pose  $M > 0$  tel que  $\forall t \in [0, 1/2], \left| \sin((2n+1)\pi t) \right| \leq M$ . Soit  $\delta \in ]0, 1/2[$ . Par inégalité triangulaire, on a

$$\left| \int_0^\delta \sin((2n+1)\pi t) dt \right| \leq \int_0^\delta \left| \sin((2n+1)\pi t) \right| dt \leq \int_0^\delta M = M\delta.$$

Ainsi,  $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$  convient.

9. Comme  $h$  et  $t \mapsto \sin((2n+1)\pi t)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\delta, 1/2]$ , on peut faire une intégration par parties :

$$\int_\delta^{1/2} h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt = \frac{1}{2n+1} [-h(t) \cos((2n+1)\pi t)]_\delta^{1/2} + \frac{1}{2n+1} \int_\delta^{1/2} h'(t) \cos((2n+1)\pi t) dt.$$

On note  $M' > 0$  un réel tel que  $|h'(t)| \leq M'$ , pour tout  $t \in [\delta, 1/2]$  et on reprend la constante  $M$  de la question précédente. Par inégalité triangulaire, en majorant  $|\cos|$  par 1, on obtient immédiatement :

$$\left| \int_\delta^{1/2} h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt \right| \leq \frac{2M}{2n+1} + \frac{M'(1/2 - \delta)}{2n+1}.$$

La suite de droite tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\delta^{1/2} h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt = 0.$$

10. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par relation de Chasles, avec le  $\delta$  précédent, on a :

$$\int_0^{1/2} h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt = \int_0^\delta h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt + \int_\delta^{1/2} h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt.$$

Par inégalité triangulaire, et en utilisant la question 8., on a donc

$$\left| \int_0^{1/2} h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_\delta^{1/2} h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt \right|.$$

L'intégrale à droite tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , par la question précédente. Il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,

$$\left| \int_{\delta}^{1/2} h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour tout  $n \geq N$ ,

$$\left| \int_0^{1/2} h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

On a bien montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} h(t) \sin((2n+1)\pi t) dt = 0$ .

## 2 Application aux valeurs paires de $\zeta$

### 2.1 Polynômes de Bernoulli

11. On procède par récurrence sur  $N \in \mathbb{N}$ . Notons  $\mathcal{P}(N)$  la propriété : il existe une unique famille de polynômes  $(B_n)_{n \leq N}$  vérifiant les conditions (a), (b) et (c) (avec  $n \leq N$  dans (b) et (c)).

Initialisation :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie puisque  $B_0 = 1$  est donné dans l'énoncé.

Hérédité : on suppose  $\mathcal{P}(N)$  vraie pour un  $N \in \mathbb{N}$  et on note  $B_0, \dots, B_N$  les polynômes uniquement définis. Une famille satisfaisant  $\mathcal{P}(N+1)$  est nécessairement de la forme  $(B_0, \dots, B_N, B_{N+1})$  (par unicité de la famille  $(B_0, \dots, B_N)$ ). De plus, cette famille convient ssi  $B'_{N+1} = (N+1)B_N$  et  $\int_0^1 B_{N+1}(t) dt = 0$ .

Notons  $Q$  une primitive quelconque de  $(N+1)B_N$  : c'est nécessairement une application polynomiale. Alors,  $B_{N+1}$  est à chercher de la forme  $Q + C$ , pour une constante  $C$  réelle. La condition (c) est équivalente à  $C = -\int_0^1 Q(t) dt$ , ce qui détermine la constante  $C$ . Ainsi, il existe un unique  $B_{N+1}$  satisfaisant les conditions requises.

12. Après calculs, on trouve, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

- $B_0(t) = 1, b_0 = 1$  ;
- $B_1(t) = t - 1/2, b_1 = -1/2$  ;
- $B_2(t) = t^2 - t + 1/6, b_2 = 1/6$  ;
- $B_3(t) = t^3 - 3/2(t^2) + t/2, b_3 = 0$  ;
- $B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - 1/30, b_4 = -1/30$ .

### 2.2 Calcul des coefficients de Fourier

13. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$c_k(B_1) = \int_0^1 (t - 1/2) e^{-2i\pi kt} dt.$$

Si  $k = 0$ , c'est  $\int_0^1 B_1(t) dt$ , qui vaut 0 par construction.

Si  $k \neq 0$ , on procède par intégration par parties :

$$c_k(B_1) = \left[ (t-1/2) \frac{e^{-2i\pi kt}}{-2i\pi k} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-2i\pi kt} dt.$$

L'intégrale vaut 0 et le crochet  $-\frac{1}{2i\pi k}$ .

Bilan :  $c_k(B_1) = -\frac{1}{2i\pi k}$  si  $k \neq 0$  et  $c_0(B_1) = 0$ .

14. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ , soit  $n \geq 1$ . On a :

$$c_k(B_n) = \int_0^1 B_n(t) e^{-2i\pi kt} dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 B'_{n+1}(t) e^{-2i\pi kt} dt.$$

Par intégration par parties, on en déduit :

$$c_k(B_n) = \frac{1}{n+1} \left( [B_{n+1}(t) e^{-2i\pi kt}]_0^1 + 2ik\pi \int_0^1 B_{n+1}(t) e^{-2i\pi kt} dt \right).$$

Le crochet vaut  $B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \int_0^1 B'_{n+1}(t) dt = (n+1) \int_0^1 B_n(t) dt = 0$ , car  $n \geq 1$ . Ainsi :

$$c_k(B_n) = \frac{2ik\pi}{n+1} c_k(B_{n+1}).$$

15. La relation précédente montre immédiatement que  $c_0(B_n)$  est nul, pour tout  $n \geq 1$ .

Soit  $k \neq 0$ , soit  $n \geq 1$ . Par télescopage, on écrit :

$$c_k(B_n) = c_k(B_1) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{c_k(B_{j+1})}{c_k(B_j)}.$$

On utilise la question précédente et l'expression de  $c_k(B_1)$  :

$$c_k(B_n) = -\frac{1}{2i\pi k} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(j+1)}{2i\pi k} = -\frac{n!}{(2i\pi)^n k^n}.$$

16. Comme  $B_n$  est une application polynomiale, elle est de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t) dt = n \int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0,$$

car  $n-1 \geq 1$ .

17. Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On peut regrouper les termes d'indices positif et négatif ; on a donc :

$$\sum_{k=-N}^N c_k(B_n) = c_0(B_n) + \sum_{k=1}^N (c_k(B_n) + c_{-k}(B_n)).$$

Comme  $n$  est impair,  $(-k)^n = -k^n$  pour tout  $k \geq 1$ . De la formule trouvée pour  $c_k(B_n)$ , on en déduit que  $c_k(B_n) + c_{-k}(B_n) = 0$ . De plus,  $c_0(B_n) = 0$ .

Donc, les sommes  $\sum_{k=-N}^N c_k(B_n)$  sont nulles, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ . D'après le théorème de Dirichlet,

on a  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N c_k(B_n) = B_n(0) = b_n$ . Ainsi,  $b_n$  est nul pour tout  $n \geq 3$  impair.

18. Soit  $N \in \mathbb{N}$ . De nouveau, on écrit :

$$\sum_{k=-N}^N c_k(B_n) = c_0(B_n) + \sum_{k=1}^N (c_k(B_n) + c_{-k}(B_n)) = 2 \sum_{k=1}^N c_k(B_n).$$

En effet,  $c_0(B_n) = 0$  et  $c_k(B_n) = c_{-k}(B_n) = -\frac{(2p)!}{(2i\pi)^{2p}} \times \frac{1}{k^{2p}}$ , pour tout  $k \geq 1$ , car  $k^n = (-k)^n$  (car  $n$  est pair). Ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N c_k(B_n) = -2 \frac{(2p)!}{(2i\pi)^{2p}} \zeta(2p).$$

Par le théorème de Dirichlet, cette limite vaut aussi  $b_{2p}$  donc :

$$\zeta(2p) = \frac{(2i\pi)^{2p}}{-2(2p)!} b_{2p} = (-1)^{p+1} \frac{2^{2p-1} \pi^{2p}}{(2p)!} b_{2p}.$$

19. On a  $b_2 = 1/6$ . Donc,

$$\zeta(2) = (-1)^2 \frac{2^1 \pi^2}{2!} \frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{6}.$$

20. On a  $b_4 = -1/30$ . Donc,

$$\zeta(4) = (-1)^3 \frac{2^3 \pi^4}{(4!)} \times (-1/30) = \frac{8}{24 \times 30} \pi^4 = \frac{\pi^4}{90}.$$