

## Semaine 4 - Calcul intégral

### 1 Primitives et intégrales

- Primitive d'une fonction (à valeurs réelles ou complexes)
- Existence et unicité à une constante additive près de la primitive d'une fonction continue sur un intervalle de  $\mathbb{R}$
- Primitives usuelles
- Notion naïve d'intégrale : aire algébrique sous la courbe représentative de la fonction
- $\int_a^b f$  quand  $a = b$  ou  $a > b$
- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes
- Linéarité de l'intégrale ; relation de Chasles ; propriété de positivité, croissance pour une fonction à valeurs réelles
- Théorème fondamental de l'analyse. Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  et si  $a \in I$ , la fonction  $F$  définie sur  $I$  par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est l'unique primitive de  $f$  s'annulant en  $a$
- Variante :  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$  si  $F$  est une primitive quelconque de  $f$
- Formule d'intégration par parties
- Formule de changement de variable dans une intégrale.  
*Le calcul de la nouvelle intégrale se fait en manipulant formellement les infinitésimaux  $dx$  et  $dt$ .*

### 2 Calculs pratiques

- Primitives de fonctions de la forme  $x \mapsto P(x) \cos(ax)e^{\gamma x}$ , où  $P$  est un polynôme à coefficients réels,  $a$  et  $\gamma$  sont des réels.  
*Dans la pratique, on aura souvent un produit de deux facteurs seulement.*
- Primitives de fonctions de la forme  $\cos^p \times \sin^q$ .  
*La linéarisation fonctionne toujours mais est rarement le plus rapide.*
- Intégrales des fonctions rationnelles.  
*On a traité sur des exemples le cas d'un dénominateur de degré  $\leq 2$ . Les calculs nécessitant une division euclidienne de polynômes ou une décomposition en éléments simples (non élémentaire) seront guidés.*
- Intégrales des fonctions rationnelles en  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ . Le changement de variable  $u = \tan(\theta/2)$  fonctionne toujours ; règles de Bioche pour les changements de variable

$u = \cos(\theta)$ ,  $u = \sin(\theta)$  et  $u = \tan(\theta)$ . (*Hors Programme.*)

### 3 Questions de cours

*Pas de questions de cours. La colle est tournée vers le calcul pratique. Les exercices plus ambitieux sont à réserver pour la deuxième moitié de l'heure de colle. Un autre chapitre sera consacré aux aspects plus théoriques de l'intégration sur un segment.*