DS 2 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices et autres technologies sont interdites.

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les calculs aérés, les résultats mis en valeur...

Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

1 Calculs

1. (a) Déterminer une racine carrée de $-15+8i$.

   (b) En déduire les solutions complexes de l'équation $z^2+(-5+2i)z+9-7i=0$.

2. On note f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x-2$.
   Montrer que f est bijective et calculer $(f^{-1})'(0)\cdot$

3. (a) Soit $\theta\in]-\pi,\pi[$. Rappeler sans justification l'expression de $\cos\theta$ en fonction de $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

   (b) En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=2|\arctan x|$.
   On commencera par justifier que le membre de gauche est bien défini sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on note f_t la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_t(x)=x^3+tx+1$.

   (a) Déterminer les variations de f_t en distinguant selon le signe de t.

   (b) On note $t_0=-\dfrac{3}{2^{2/3}}$. Montrer que l'équation $f_t(x)=0$ admet 1, 2 ou 3 solutions, selon que t est respectivement strictement supérieur, égal ou strictement inférieur à t_0.

   (c) Représenter l'ensemble $\big\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid f_t(x)=0\big\}$.

2 Problème – Deux calculs de $\zeta(2)$

Dans ce problème, on propose deux calculs pour déterminer $\zeta(2)$, défini comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.
On admet que cette limite existe et que, si (a_n) est une suite strictement croissante d'entiers naturels, alors on a aussi $\zeta(2)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{a_n}\frac{1}{k^2}$.
Les deux parties sont indépendantes.

2.1 Via le lemme de Riemann-Lebesgue.

Pour ce calcul, on admet le lemme de Riemann-Lebesgue suivant.
Si f est une fonction continue sur $[0,\pi]$, alors, quand $n\to+\infty$,

$$\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt \to 0 \text{ et } \int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt \to 0.$$

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(nt)dt=\frac{(-1)^n-1}{n^2}$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(nt)dt=\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$. En déduire que
   $$\int_0^\pi\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)\cos(nt)dt=\frac{1}{n^2}.$$
2. Soient $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=-\frac{1}{2}+\frac{\sin(nx+x/2)}{2\sin(x/2)}$.

   On définit les fonctions ϕ sur $[0,\pi]$ et ψ sur $]0,\pi]$ par
   $$\phi(t)=\frac{t^2}{4\pi}-\frac{t}{2} \text{ et } \psi(t)=\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}.$$
3. Montrer que ψ admet une limite finie ℓ en 0, que l'on précisera.

   On convient que $\psi(0)=\ell$. Ainsi prolongée, ψ est une fonction continue sur $[0,\pi]$.
4. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt+\int_0^\pi\big(\phi(t)\cos(nt)+\psi(t)\sin(nt)\big)dt.$$
   En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\to\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt$, quand $n\to+\infty$.
5. En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

2.2 Via le calcul d'une somme trigonométrique

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2^{n+1}}\right)}$.

   (a) Montrer que, pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2(\pi/2 - x)} = \dfrac{4}{\sin^2(2x)}$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $S_n = 4S_{n-1} + 2$.

   (c) En déduire l'expression de S_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Montrer que, pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $\sin x < x < \tan x$.

8. En déduire que, pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1 < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n - (2^n - 1) < \frac{4^{n+1}}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < S_n.$$

10. En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

3 Problème – Cercle passant par p points entiers

On note $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$, l'ensemble des *points entiers* de $\mathbb{C}$. L'objectif du problème est de montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un cercle $\mathcal{C}$ contenant exactement p points entiers, c'est-à-dire tel que $\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}[i]$ soit de cardinal p.

3.1 Solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = 5^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E_n = \{z \in \mathbb{Z}[i] \mid |z|^2 = 5^n\}$ et on cherche à déterminer son cardinal.

1. Montrer que $E_0 = \mathbb{U}_4 = \{\pm 1, \pm i\}$.

2. Pour tout $\omega \in \mathbb{U}_4$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit[1] $z_{\omega,k}^{(n)}$ par

$$z_{\omega,k}^{(n)} = \omega(2 + i)^k (2 - i)^{n-k}.$$

   (a) Montrer que si $\omega \in \mathbb{U}_4$ et si $k \in [\![0, n]\!]$, alors $z_{\omega,k}^{(n)} \in E_n$.

   On fixe $\omega, \omega' \in \mathbb{U}_4$ et $k, k' \in [\![0, n]\!]$ et on suppose que $z_{\omega,k}^{(n)} = z_{\omega',k'}^{(n)}$.

[1] Le (n) est seulement là pour rappeler la dépendance en n de la notation. Ce n'est pas un exposant !

(b) Montrer que $\left(\dfrac{2+i}{2-i}\right)^{4(k-k')} = 1$.

(c) On note θ un argument de $\dfrac{2+i}{2-i}$. Déterminer les valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

On admet le résultat suivant[2] :

Si $r \in \mathbb{Q}$ *est tel que* $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$, *alors* $\cos(r\pi) \in \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

(d) Déduire de ce résultat que $(\omega, k) = (\omega', k')$. Combien y a-t-il de points $z_{\omega,k}^{(n)}$?

3. On suppose $n \geq 1$. Soit $z = x + iy$ un élément de E_n écrit sous forme algébrique.
   (a) Montrer que l'un au moins des deux entiers $2x - y$ et $2x + y$ est divisible par 5.
   (b) En déduire que l'un au moins des deux nombres complexes $\dfrac{z}{2+i}$ et $\dfrac{z}{2-i}$ appartient à E_{n-1}.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout élément z de E_n est de la forme $z_{\omega,k}^{(n)}$, pour un $\omega \in \mathbb{U}_4$ et un $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire que E_n a $4(n+1)$ éléments.

3.2 Cercle passant par un nombre pair p de points

Soit $p \geq 2$ un entier pair. On note $n = \dfrac{p}{2} - 1$ et $P_n = \{z = x + iy \in E_n \mid x \text{ est pair}\}$.

4. Montrer que E_n compte autant de points de partie réelle paire, que de points de partie réelle impaire. En déduire que P_n est de cardinal p.

5. En déduire que le cercle de centre $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2} \times 5^{n/2}$ contient exactement p points de $\mathbb{Z}[i]$.

3.3 Cercle passant par un nombre impair p de points

Soit $p \geq 1$ un entier impair. On note $F_{p-1} = \{z = x + iy \in E_{p-1} \mid x \equiv -1\,[3] \text{ et } y \equiv 0\,[3]\}$.
Pour tout $a \in [\![0, 5^{(p-1)/2}]\!]$, on note $T_a = \{z = x + iy \in E_{p-1} \mid |x| = a \text{ ou } |y| = a\}$.

6. Montrer que T_0 est de cardinal 4 et que $T_0 \cap F_{p-1}$ est de cardinal 1.

7. Soit $a \in [\![1, 5^{(p-1)/2} - 1]\!]$ tel que T_a est non vide. Montrer que T_a est de cardinal 8 et que $T_a \cap F_{p-1}$ est de cardinal 2.

8. En déduire que F_{p-1} est de cardinal p.

9. Déterminer un cercle contenant exactement p points de $\mathbb{Z}[i]$.

[2] cf. DS 2, 2023-2024