DM 5 - Théorème de Cantor-Bernstein, ensembles dénombrables et théorème de Knaster-Tarski

Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires. Les exercices 4 et 5 ne seront pas corrigés.

1 Théorème de Cantor-Bernstein

Soient E et F deux ensembles[1], soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux injections. On souhaite montrer que E et F sont équipotents, c'est-à-dire qu'il existe une bijection de E dans F – c'est le *théorème de Cantor-Bernstein.* On introduit d'abord quelques définitions :

- Un élément $x \in E$ (resp. $y \in F$) a un parent s'il a un antécédent par g (resp. par f). Un tel antécédent est nécessairement unique : on l'appellera *le parent* de x (resp. de y).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit récursivement le nombre d'ancêtres d'un élément de E ou de F :
  - Les éléments ayant 0 ancêtre sont ceux n'ayant pas de parent.
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les éléments ayant (exactement) n ancêtres sont ceux ayant un parent, et dont le parent a (exactement) $n-1$ ancêtres.
  - Les éléments restants ont une infinité d'ancêtres.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n (resp. F_n) les éléments de E (resp. de F) ayant n ancêtres.
- On note E_∞ (resp. F_∞) les éléments de E (resp. de F) ayant une infinité d'ancêtres.

1. Montrer que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} E_n$ et que cette union est disjointe.
   On admet le résultat analogue pour F.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(E_n) = F_{n+1}$ et que $g(F_n) = E_{n+1}$. En déduire[2] que
   $$f_{|E_n} : E_n \to F_{n+1} \text{ et } g_{|F_n} : F_n \to E_{n+1}$$
   sont des bijections.
3. Montrer que $f(E_\infty) = F_\infty$ et en déduire que $f_{|E_\infty} : E_\infty \to F_\infty$ est une bijection.
4. En déduire l'existence d'une bijection $h : E \to F$.
   On pourra faire un schéma résumant la situation.

[1] On supposera pour simplifier E et F disjoints mais le résultat est valable en général.
[2] On n'écrit pas explicitement les co-restrictions pour ne pas alourdir la notation.

2 Ensembles infinis dénombrables

Un ensemble est *infini dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Dans cet exercice, on donne des exemples élémentaires de cette notion. On suppose connu (cf. TD) le fait que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont infinis dénombrables.

1. En utilisant que $\mathbb{N}^2$ est infini dénombrable, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est infini dénombrable.

2. Montrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est infinie dénombrable.

3. En déduire qu'une partie infinie d'un ensemble infini dénombrable est infinie dénombrable.

4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable.

3 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

On souhaite montrer que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. On note

- $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites $u : \mathbb{N}^* \to [\![0,9]\!]$ qui ne sont pas stationnaires en 9 :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : u_n \neq 9.$$

- f l'application de $\mathscr{S}$ dans $[0,1[$ définie par $\forall u \in \mathscr{S}, f(u) = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{u_n}{10^n}$.

1. Montrer que f est bien définie.

Soient u et v deux suites distinctes dans $\mathscr{S}$. On note $k \in \mathbb{N}^*$ le plus petit indice tel que $u_k \neq v_k$. Par symétrie, on suppose $u_k < v_k$. On note $p \in \mathbb{N}^*$ un indice tel que $p > k$ et $u_p \neq 9$.

2. Soit $N \geq p$. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{v_n}{10^n} - \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{u_n}{10^n} \geq \dfrac{1}{10^p} + \dfrac{1}{10^N}$.

3. En déduire que f est injective.

On se donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une suite[3] u^k dans $\mathscr{S}$.

4. Construire une suite v dans $\mathscr{S}$ distincte de tous les u^k.

5. En déduire que $\mathscr{S}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

[3] On fera attention à bien distinguer exposant et indice. Le n-ème terme de la suite u^k s'écrit u^k_n.

Notes.

- Il n'est pas difficile de montrer que f est une bijection de $\mathscr{S}$ dans $[0,1[$.
- Avec un peu plus de travail, on montre que $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.
- L'hypothèse du continu affirme que tout ensemble X tel que $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$ est infini dénombrable ou équipotent à $\mathbb{R}$. En 1963, le mathématicien Paul Cohen a démontré que l'hypothèse du continu et l'axiome du choix sont indécidables : il est impossible de démontrer, à partir des axiomes de la théorie des ensembles, que ces assertions sont vraies ou fausses.

4 Cardinaux

On suppose connu le théorème de Cantor-Bernstein. Soit Ω un ensemble dont les éléments sont des ensembles[4]. On définit une relation binaire $\sim$ sur Ω par

$$\forall A, B \in \Omega, A \sim B \text{ ssi } \exists f : A \to B \text{ une bijection.}$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur Ω.

On note C_Ω l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$. Si $A \in \Omega$, on note $\hat{A} \in C_\Omega$ la classe de A. On définit une relation binaire $\leq$ sur C_Ω par :

$$\forall \hat{A}, \hat{B} \in C_\Omega, \hat{A} \leq \hat{B} \text{ ssi } \exists f : A \to B \text{ une injection.}$$

2. Montrer que $\leq$ est bien définie et que c'est une relation d'ordre sur C_Ω.

On cherche à montrer que cet ordre est total. On considère donc A et B deux ensembles dans Ω et on doit montrer qu'il existe une injection de A vers B ou de B vers A.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des triplets (E, F, f) où $E \subset A$, $F \subset B$ et $f : E \to F$ est une bijection. On définit une relation d'ordre $\leq$ sur $\mathscr{A}$ par : $(E, F, f) \leq (E', F', f')$ si $E \subset E'$, $F \subset F'$ et f' prolonge f.

3. Soit $\mathscr{C}$ une partie de $\mathscr{A}$ tel que l'ordre induit par $\leq$ sur $\mathscr{C}$ est total. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une borne supérieure dans $\mathscr{A}$.

Le lemme de Zorn[5] permet alors d'affirmer qu'il existe au moins un élément maximal dans $\mathscr{A}$. Considérons un tel élément, donné par un triplet (E, F, f).

4. On suppose par l'absurde que $E \neq A$ et $F \neq B$. Obtenir une contradiction.
5. Conclure.

[4] On pourra penser à Ω comme l'ensemble *de tous* les ensembles, mais il n'existe pas de tel ensemble...

[5] Équivalent à l'axiome du choix.

5 Théorème de Knaster-Tarski

Un ensemble ordonné $(T, \leq)$ est un treillis si, pour tous $a, b \in T$, la partie $\{a, b\}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.

1. Montrer que si $(T, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné, alors c'est un treillis.
2. Soit E un ensemble. Montrer que l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est un treillis.
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ ordonné par la relation de divisibilité est un treillis.

Un treillis $(T, \leq)$ est complet si toute partie A de T admet une borne supérieure[6]

4. Soit E un ensemble. Montrer que $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est un treillis complet.
5. Soit $(T, \leq)$ un treillis complet. Soit A une partie de T ; on cherche à montrer que A admet une borne inférieure. On définit $\mathscr{M} = \{m \in T \mid \forall a \in A, m \leq a\}$ et on note $\overline{m} = \sup(\mathscr{M})$.
   (a) Montrer que $\forall m \in \mathscr{M}, \forall a \in A, m \leq \inf\{\overline{m}, a\}$.
   (b) En déduire que $\forall a \in A, \overline{m} = \inf\{\overline{m}, a\}$.
   (c) En déduire que $\overline{m} \in \mathscr{M}$ et que A admet une borne inférieure.
6. Soit $(T, \leq)$ un treillis complet. Soit $f : T \to T$ une application croissante. On cherche à montrer que f admet un point fixe[7], c'est-à-dire qu'il existe $x \in T$ tel que $f(x) = x$. On note $A = \{x \in T \mid x \leq f(x)\}$ et $M = \sup(A)$
   (a) Montrer que $\forall x \in A, x \leq f(M)$. En déduire que $M \leq f(M)$.
   (b) Montrer que $f(M) \in A$ et conclure.
7. **Une première application.** Soient $a < b$ deux réels.
   (a) Montrer que le segment $[a, b]$, muni de l'ordre usuel, est un treillis complet.
   (b) En déduire que toute fonction croissante de $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet un point fixe.
   (c) Le résultat subsiste-t-il si on remplace $[a, b]$ par $]0, 1[$ ou par $\mathbb{R}$?
8. **Une autre preuve du théorème de Cantor-Bernstein.**
   Soient E et F deux ensembles, soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications injectives.
   (a) On définit G de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$ par $\forall A \in \mathscr{P}(E), G(A) = E \setminus g\big(F \setminus f(A)\big)$. Montrer que G est une application croissante pour la relation d'inclusion.
   (b) Montrer que G admet un point fixe, qu'on notera M dans la suite.
   (c) Pour tout $x \in g(F)$, on note $g^{-1}(x) \in F$ l'unique antécédent de x par g.
   On définit $h : E \to F$ par $\forall x \in E, h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in M \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \notin M. \end{cases}$
   Montrer que h est une bijection de E dans F.

[6] En particulier, avec $A = \emptyset$, T admet un plus petit élément.
[7] Théorème de Knaster-Tarski