

Semaine 5 - Applications, relations binaires

1 Applications

- Application (*synonyme : fonction*)
- Images, antécédents, image directe, image réciproque
- Restriction, prolongement, co-restriction d'une application
- Application identité, composition d'applications
- Injections, surjections, bijections
- Bijection réciproque
- Permutation, involution
- Fonctions indicatrices ; bijection canonique entre $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\{0; 1\}^\Omega$
- Familles d'éléments, unions et intersections quelconques

2 Généralités sur les relations

- Relation binaire sur un ensemble E
- Propriétés de réflexivité, symétrie, anti-symétrie, transitivité

3 Relations d'équivalence

- Relation d'équivalence
- Classes d'équivalences, partitions d'un ensemble
- Les classes d'équivalence forment une partition d'un ensemble ; réciproquement, une partition donne lieu à une relation d'équivalence.
- Exemple détaillé de la congruence modulo $n \in \mathbb{N}$
- Ensemble quotient – HP, définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Exemple culturel : construction de \mathbb{Z} comme ensemble quotient

4 Relations d'ordre

- Relation d'ordre (large) ; ensemble ordonné
- Exemples fondamentaux :
 - \mathbb{R} , avec l'ordre usuel
 - $\mathcal{P}(E)$, avec la relation d'inclusion
 - \mathbb{N} , avec la relation de divisibilité

- Application croissante entre ensembles ordonnés
- Ordre total, ordre partiel
- Élément minimal, élément maximal. Dans $\mathbb{N} - \{0, 1\}$, avec la relation de divisibilité, les éléments minimaux sont les nombres premiers.
- Plus petit élément, plus grand élément. Coïncidence avec les notions précédentes dans le cas d'un ordre total
- Minorant, majorant d'une partie F dans un ensemble ordonné E
- Borne inférieure, borne supérieure. Exemple dans $\mathbb{N} - \{0\}$ (relation de divisibilité) : la borne inférieure/supérieure de $\{a, b\}$ est le pgcd/ppcm de $\{a, b\}$.
- Représentation graphique de l'ordre de divisibilité sur \mathbb{N} .

5 Questions de cours

- Propriétés des images directe et réciproque
- Une composée d'injections est une injection ; si $g \circ f$ est injective, f est injective
- Une composée de surjections est une surjection ; si $g \circ f$ est surjective, g est surjective
- $f : E \rightarrow F$ est bijective ssi il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$
- Définition des différentes propriétés d'une relation binaire
- Les classes d'équivalence forment une partition.
- Exemples de relations d'équivalence/relations d'ordre.
- Définition des notions d'élément minimal/plus petit élément/minorant/borne inférieure. Exemples et contre-exemples.