DS 2 de mathématiques – Corrigé

1 Calculs

1. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et on suppose que $z^2 = -15 + 8i$. Alors, en identifiant partie réelle, partie imaginaire et module au carré, on a :

$$x^2 - y^2 = -15,\ 2xy = 8 \text{ et } (x^2 + y^2)^2 = 15^2 + 8^2.$$

Comme $15^2 + 8^2 = 289 = 17^2$ et que $x^2 + y^2 \geq 0$, la dernière égalité donne $x^2 + y^2 = 17$. En ajoutant et soustrayant la première et la dernière égalités, on a $x^2 = 1$ et $y^2 = 16$. Donc, $x = \pm 1$ et $y = \pm 4$. Comme on veut $2xy = 8$, on a $(x, y) = (1, 4)$ ou $(x, y) = (-1, -4)$.
Réciproquement, on constate que $(1 + 4i)^2 = 15 + 8i$, donc $1 + 4i$ convient.

(b) Il s'agit d'une équation de degré 2 de discriminant $\Delta = (-5+2i)^2 - 4(9-7i) = 25-20i-4-36+28i = -15+8i$. Une racine carrée du discriminant est $\delta = 1+4i$. Les solutions complexes sont donc $\dfrac{(5-2i) \pm \delta}{2}$. Après simplification, il s'agit de $3 + i$ et $2 - 3i$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. Sa dérivée vaut $f'(x) = 3x^2+1 > 0$, pour $x \in \mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites en $\pm\infty$ sont celles de $x \mapsto x^3$, donc $\pm\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires (étendu aux bornes), tout réel a un antécédent par f ; par stricte croissance, il en a un seul. Donc, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Comme f' ne s'annule jamais, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. On remarque que $f(1) = 0$. On a donc :

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}.$$

3. (a) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Alors, $u = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est bien défini et $\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $-1 - x^2 < 1 - x^2 < 1 + x^2$. En divisant par $1 + x^2 > 0$, on en déduit que $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \in]-1, 1[$. Comme arccos est définie sur $[-1, 1]$, le membre de gauche est défini sur $\mathbb{R}$.
On note $\theta = 2\arctan x$, de sorte que $x = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. D'après la question précédente, on a $\cos\theta = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. Donc, $\arccos(\cos\theta) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. Or,

$\arccos(\cos\theta)$ est par définition l'unique angle entre 0 et π de même cosinus que θ ; comme $\theta \in]-\pi,\pi[$ et que cos est paire, il s'agit de $|\theta|$. Ainsi, $|2\arctan x| = |\theta| = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

4. (a) La fonction f_t est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 3x^2 + t$. Elle a toujours pour limites $\pm\infty$ en $\pm\infty$.

   - Si $t \geq 0$, f_t' est positive sur $\mathbb{R}$, et strictement positive sauf en 0 pour $t = 0$. Donc, pour $t \geq 0$, f_t est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - Si $t < 0$, $f_t'(x)$ s'annule en $x = \pm\sqrt{\dfrac{|t|}{3}}$ et est strictement positive à l'extérieur de ces valeurs, strictement négative entre ces valeurs. On note $\alpha_t = \sqrt{\dfrac{|t|}{3}}$. Les variations de f_t sont donc (*à résumer dans un tableau*) :
     - f_t est strictement croissante sur $]-\infty,-\alpha_t[$;
     - f_t est strictement décroissante sur $]-\alpha_t,\alpha_t[$;
     - f_t est strictement croissante sur $]\alpha_t,+\infty[$.

   (b) Si $t \geq 0$, on a dit que f_t était strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de limites $\pm\infty$; l'équation $f_t(x) = 0$ a alors une unique solution.
   On suppose désormais $t < 0$. On observe que $f_t(0) = 1 > 0$. Avec les variations trouvées à la question précédente, on en déduit que $f_t(-\alpha_t) > f_t(0) > 0$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, f_t s'annule une unique fois sur l'intervalle $]-\infty,\alpha_t[$. De plus, le minimum de f_t sur $[-\alpha_t,+\infty[$ est $f_t(\alpha_t)$; les variations donnent alors les comportements suivants :

   - Si $f_t(\alpha_t) > 0$, f_t ne s'annule pas sur $[-\alpha_t,+\infty[$.
   - Si $f_t(\alpha_t) = 0$, f_t s'annule seulement en α_t sur $[-\alpha_t,+\infty[$.
   - Si $f_t(\alpha_t) < 0$, f_t s'annule (par TVI) deux fois sur $[-\alpha_t,+\infty[$.

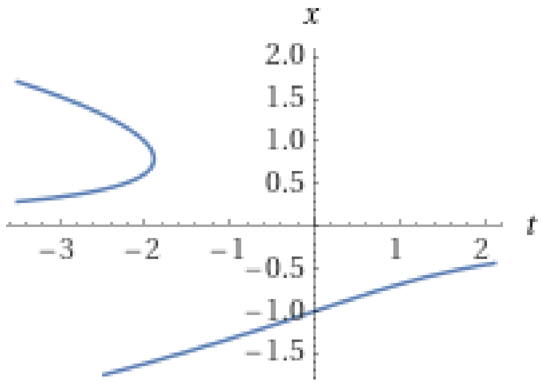
   Or, $f_t(\alpha_t) = \alpha_t^3 + t\alpha_t + 1 = \alpha_t(3\alpha_t^2 + t) - 2\alpha_t^3 + 1 = 1 - 2\alpha_t^3$ car $3\alpha_t^2 + t = 0$ par construction. On a donc :

   $$f_t(\alpha_t) > 0 \iff \alpha_t^3 < 1/2 \iff \alpha_t < \frac{1}{2^{1/3}} \iff |t| < \frac{3}{2^{2/3}} \iff -t > -t_0,$$

   avec des équivalences similaires pour $f_t(\alpha_t) = 0$ et $f_t(\alpha_t) < 0$. En combinant tout ce qui a été dit :

   - f_t s'annule une fois sur $\mathbb{R}$ si $t > t_0$ (avant t_0) ;
   - f_t s'annule deux fois sur $\mathbb{R}$ si $t = t_0$ (une fois avant t_0, une fois en t_0) ;
   - f_t s'annule trois fois sur $\mathbb{R}$ si $t < t_0$ (une fois avant $-\alpha_t$, une fois entre 0 et α_t, une fois après α_t).

   (c) Avec t en abscisse et x en ordonnée, on a l'allure suivante.



On observe la transition entre 1 et 3 solutions. De plus, il y a toujours une solution négative ; les deux autres sont positives quand elles existent.

2 Problème – Deux calculs de $\zeta(2)$

2.1 Via le lemme de Riemann-Lebesgue.

1. (a) Par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(nt)dt = [\frac{t}{n}\sin(nt)]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)dt$.
   (*On dérive t et on intègre* $\cos(nt)$)
   Donc, $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(nt)dt = 0 - \frac{1}{n}[-\frac{\cos(nt)}{n}]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$.

   (b) De nouveau, on intègre par parties, en dérivant t^2 et en intégrant $\cos(nt)$.
   $$\int_0^\pi t^2\cos(nt)dt = [\frac{t^2}{n}\sin(nt)]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin(nt)dt = -\frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin(nt)dt.$$
   Or, $\displaystyle\int_0^\pi t\sin(nt)dt = -[\frac{t}{n}\cos(nt)]_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)dt = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$. Donc,
   $$\int_0^\pi t^2\cos(nt)dt = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$
   On a donc : $\displaystyle\int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\cos(nt)dt$
   $$= -\int_0^\pi t\cos(nt) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t^2\cos(nt)dt = -\frac{(-1)^n - 1}{n^2} + \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\cos(kx) = \mathrm{Re}(e^{ikx})$. On a donc :
   $$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\Big) = \mathrm{Re}\Big(e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\Big).$$

La somme est géométrique de raison différente de 1 *car* $x \not\equiv 0\,[2\pi]$. Par la méthode de l'angle moitié :

$$e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}e^{inx/2}e^{-ix/2}\frac{-2i\sin(nx/2)}{-2i\sin(x/2)} = e^{i(n+1)x/2}\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

En prenant la partie réelle :

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \cos((n+1)x/2)\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

Or, si α et β sont réels, $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$.
Avec $\alpha = \dfrac{(n+1)x}{2}$ et $\beta = \dfrac{nx}{2}$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin(nx+x/2)-\sin(x/2)}{2\sin(x/2)} = -\frac{1}{2}+\frac{\sin(nx+x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

3. Quand $t \to 0$, $\dfrac{t^2}{2\pi} - t \sim -t$, $\cos(t/2) \sim 1$ et $2\sin(t/2) \sim 2\times t/2 = t$. Par produit et quotient d'équivalents, on a donc $\psi(t) \sim -t \times \dfrac{1}{t} = -$. Donc, ψ a pour limite -1 en 0.

4. On commence par remarquer que pour tout $x \not\equiv 0[2\pi]$,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = -\frac{1}{2}+\frac{\sin(nx+x/2)}{\sin(x/2)} = -\frac{1}{2}+\frac{\cos(nx)}{2}+\frac{\cos(nx/2)\sin(nx)}{2\sin(nx/2)}.$$

En multipliant par $-x+\dfrac{x^2}{2\pi}$:

$$\left(-x+\frac{x^2}{2\pi}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2\pi}\right)+\phi(x)\cos(nx)+\psi(x)\sin(nx).$$

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)\cos(kt)dt$. On invertit somme et intégrale par linéarité de l'intégration et on utilise le calcul précédent :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt + \int_0^{\pi}\big(\phi(t)\cos(nt)+\psi(t)\sin(nt)\big)dt.$$

Par application du lemme de Riemann-Lebesgue, l'intégrale de droite tend vers 0. Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt$ quand $n \to +\infty$.

5. On calcule l'intégrale :

$$\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

En divisant finalement par 2, on trouve que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

2.2 Via le calcul d'une somme trigonométrique

6. (a) Soit $x \in]0, \pi/2[$. On a $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$, donc

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2(\pi/2 - x)} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Le numérateur vaut 1, le dénominateur vaut $\dfrac{1}{4}\sin^2(2x)$. D'où l'identité demandée.

(b) Soit $n \geq 2$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2^{n+1}}\right)} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2^{n+1}}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2^{n+1}}\right)}.$$

Le terme central vaut $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$. Dans la somme de droite, on fait le changement de variable $\ell = 2^n - k$, puis on rassemble la somme de gauche et celle de droite. On a donc :

$$S_n = 2 + \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2^{n+1}}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi(2^n-k)}{2^{n+1}}\right)}.$$

Avec la question précédente, comme $\dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi(2^n-k)}{2^{n+1}}\right)} = \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{2^{n+1}}\right)}$, on a :

$$S_n = 2 + \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{4}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2^n}\right)} = 2 + 4S_{n-1}.$$

(c) On reconnait une relation de récurrence arithmético-géométrique. La solution dans $\mathbb{R}$ de $x = 2 + 4x$ est $x = -2/3$. On pose donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_n + 2/3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$T_{n+1} = S_{n+1} + 2/3 = 2 + 4S_n + 2/3 = 4(S_n + 2/3) = 4T_n.$$

Donc, (T_n) est géométrique de raison 4 et $T_n = T_1 \times 4^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $S_n = T_1 \times 4^{n-1} - 2/3$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $S_1 = 2$, $T_1 = 8/3$ et donc $S_n = 8/3 \times 4^{n-1} - 2/3 = \dfrac{2(4^n - 1)}{3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. On définit f et g sur $[0, \pi/2[$ par $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \tan x - x$. Ces deux fonctions sont dérivables ; pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, avec égalité seulement en 0 et $g'(x) = \tan^2 x \geq 0$, avec égalité seulement en 0. Ainsi, f et g sont strictement croissantes sur $[0, \pi/2]$. Comme elles s'annulent toutes deux en 0, elles sont strictement positives sur $]0, \pi/2[$. D'où les inégalités de l'énoncé.

8. Comme la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{y^2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'inégalité précédente donne :
$$\forall x \in]0, \pi/2[, \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$
On conclut en remarquant que $\dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1, 2^n - 1]\!]$. Comme $\dfrac{k\pi}{2^{n+1}} \in]0, \pi/2[$. On a donc :
$$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)} - 1 < \frac{4^{n+1}}{k^2\pi^2} < \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)}.$$
On somme pour k allant de 1 à $2^n - 1$.
$$S_n - (2^n - 1) < \frac{4^{n+1}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < S_n.$$

10. On divise l'inégalité précédente par $\dfrac{4^{n+1}}{\pi^2}$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi^2 S_n}{4^{n+1}} - \frac{\pi^2(2^n - 1)}{4^{n+1}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2 S_n}{4^{n+1}}.$$
Le terme $\dfrac{\pi^2(2^n-1)}{4^{n+1}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Par ailleurs, l'expression trouvée plus haut pour S_n montre que $S_n \sim \dfrac{2}{3} \times 4^n$. Ainsi, les membres de gauche et de droite de l'inégalité tendent tous deux vers $\dfrac{\pi^2}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Par théorème d'encadrement, c'est la valeur de $\zeta(2)$.

3 Problème – Cercle passant par p points entiers

3.1 Solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = 5^n$

1. Soit $z \in E_0$. On écrit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{Z}$ et on a donc $x^2 + y^2 = 1$. Les seules possibilités sont $(x, y) = (1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$. Ce qui correspond aux 4 éléments de $\mathbb{U}_4$. Réciproquement, on a bien $\mathbb{U}_4 \subset E_0$.

2. (a) Soit $\omega \in \mathbb{U}_4$, soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors,

$$|z_{\omega,k}^{(n)}|^2 = |\omega|^2 \times |2+i|^{2k} \times |2-i|^{2(n-k)}| = 1 \times 5^k \times 5^{n-k} = 5^n.$$

De plus, le produit de deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ est dans $\mathbb{Z}[i]$: en effet, si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, alors $(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$ et $ac-bd, ad-bc \in \mathbb{Z}$. Comme ω, $2+i$ et $2-i$ sont dans $\mathbb{Z}[i]$, $z_{\omega,k}^{(n)}$ aussi. Donc, $z_{\omega,k}^{(n)} \in E_n$.

(b) On a $\omega(2+i)^k(2+i)^{n-k} = \omega'(2+i)^{k'}(2-i)^{n-k'}$. Donc,

$$\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^{k-k'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

On élève à la puissance 4 ; comme ω et ω' sont des racines 4-èmes de l'unité, le membre de droite élevé à la puissance 4 vaut 1. D'où l'égalité de l'énoncé.

(c) On a $\dfrac{2+i}{2-i} = \dfrac{(2+i)^2}{|2-i|^2} = \dfrac{3+4i}{5}$. C'est un nombre complexe de module 1 ; il s'écrit $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ si θ en est un argument. Par identification, on a $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$.

(d) On suppose par l'absurde que $k \neq k'$. Alors, $\dfrac{2+i}{2-i}$ est une racine $4(k-k')$-ème de l'unité d'après 1.b). On sait alors que $\dfrac{2+i}{2-i}$ peut s'écrire $e^{i\theta}$, où θ est de la forme $\dfrac{2\ell\pi}{4(k-k')}$, pour un certain $\ell \in \mathbb{Z}$. Alors, $r = \dfrac{\ell}{2(k-k')} \in \mathbb{Q}$ et $\cos(r\pi) = \dfrac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, d'après la question précédente. C'est absurde par le résultat admis : $\cos(r\pi)$ ne peut prendre que les valeurs 0, ± 1 et $\pm 1/2$ dans ces conditions.
Donc, $k = k'$. Il est alors clair qu'on a aussi $\omega = \omega'$.
On vient de montrer que le couple $(\omega, k) \in \mathbb{U}_4 \times [\![0, n]\!]$ était déterminé par le point $z_{\omega,k}^{(n)}$. Ainsi, il y a autant de points $z_{\omega,k}^{(n)}$ que de tels couples (ω, k), donc $4(n+1)$.

3. (a) Par hypothèse, $x^2 + y^2 = 5^n$. Comme $n \geq 1$, 5 divise $x^2 + y^2$. Donc, 5 divise aussi $4x^2 - y^2 = -(x^2+y^2) + 5x^2$. Or, $4x^2 - y^2 = (2x-y)(2x+y)$. Comme 5 est premier, il divise l'un des deux facteurs $2x-y$ ou $2x+y$ par le lemme d'Euclide.

(b) Supposons que 5 divise $2x-y$. On a alors

$$\frac{z}{2-i} = \frac{(x+iy)(2+i)}{5} = \frac{(2x-y)+i(2y+x)}{5}.$$

Comme 5 divise $2x-y$, il divise aussi $2(2x-y) = 4x-2y$, donc aussi $4x-2y-5x = -(x+2y)$. Finalement, 5 divise aussi $2y+x$. Ceci montre que $\dfrac{z}{2-i} \in \mathbb{Z}[i]$.

De plus, $\left|\dfrac{z}{2-i}\right|^2 = \dfrac{|z|^2}{5} = 5^{n-1}$. Donc, $\dfrac{z}{2-i} \in E_{n-1}$.
De manière analogue, on montre que si 5 divise $2x+y$, alors $\dfrac{z}{2+i} \in E_{n-1}$.

(c) On sait déjà que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\{z_{\omega,k}^{(n)}, (\omega, k) \in \mathbb{U}_4 \times [\![0,n]\!]\right\} \subset E_n$. On montre l'inclusion réciproque par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, l'ensemble de gauche est $\mathbb{U}_4$ et on a déjà montré l'égalité $\mathbb{U}_4 = E_0$.
- Soit $n \geq 1$ tel que l'inclusion $E_{n-1} \subset \left\{z_{\omega,k}^{(n-1)}, (\omega, k) \in \mathbb{U}_4 \times [\![0, n-1]\!]\right\}$ est vraie. Soit $z \in E_n$. On sait que $\dfrac{z}{2-i} \in E_{n-1}$ ou que $\dfrac{z}{2+i} \in E_{n-1}$. Par symétrie, on considère uniquement le premier cas. On peut donc écrire, par hypothèse de récurrence, $\dfrac{z}{2-i} = \omega(2-i)^k(2+i)^{n-1-k}$, où $\omega \in \mathbb{U}_4$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors, $z = \omega(2-i)^{k+1}(2+i)^{(n-(k+1))}$. Donc, z est de la forme $z_{\omega,\ell}^{(n)}$, pour un $\omega \in \mathbb{U}_4$ et un $\ell \in [\![0,n]\!]$. Ceci conclut la récurrence.

Les deux ensembles étant égaux, ils ont même cardinal. On a déjà dit que l'ensemble $\left\{z_{\omega,k}^{(n)}, (\omega, k) \in \mathbb{U}_4 \times [\![0,n]\!]\right\}$ était de cardinal $4(n+1)$. Donc, E_n aussi.

3.2 Cercle passant par un nombre pair p de points

4. Comme 5^n est impair et que $x^2 + y^2 = 5^n$ si $z = x + iy \in E_n$, x^2 et y^2 n'ont pas la même parité, donc x et y non plus. Si $x + iy$ est dans E_n, alors $y + ix$ aussi et x, la partie réelle de $x+iy$, est pair ssi y, la partie réelle de $y+ix$, est impair. Ceci montre qu'il y a autant de points de E_n de partie réelle paire, que de points de partie réelle impaire.
Ainsi, $|P_n| = \dfrac{|E_n|}{2}$. Or, $|E_n| = 4(n+1) = (2p-4)+4 = 2p$. Donc, P_n est de cardinal p.

5. Notons τ la similitude de $\mathbb{C}$ définie par $\tau(z) = 2\left(z - \dfrac{1}{2}\right) = 2z - 1$. On constate que τ envoie le cercle $\mathcal{C}$ de centre $1/2$ et de rayon $1/2 \times 5^{n/2}$ sur le cercle de centre 0 et de rayon $5^{n/2}$. De plus, les points de $\mathbb{Z}[i]$ du premier cercle correspondent (de façon bijective) aux points de $\mathbb{Z}[i]$ du deuxième dont la partie réelle est paire et la partie imaginaire impaire. Or, $z \in E_n$ ssi z est sur le cercle de centre 0 et de rayon $5^{n/2}$; ainsi, le nombre de points de $\mathbb{Z}[i] \cap \mathcal{C}$ est égal au nombre de points de points de $\mathcal{P}_n$, c'est-à-dire p.

3.3 Cercle passant par un nombre impair p de points

6. Un point $z = x + iy$ est dans T_0 ssi x ou y est nul et $x^2 + y^2 = 5^{p-1}$. Il y a 4 possibilités : $(0, \pm 5^{(p-1/2)})$ et $(\pm 5^{(p-1)/2}, 0)$. (*on utilise que p est impair*) Donc, T_0 est de cardinal 4.
   Seuls les points $(\pm 5^{(p-1)/2}, 0)$ peuvent être dans F_{p-1}. Comme 3 ne divise pas $5^{(p-1)/2}$, $5^{(p-1)/2}$ est congru à 1 ou à -1 modulo 3 ; et donc son opposé à -1 ou 1. Ainsi, $T_0 \cap F_{p-1}$ est de cardinal 1.

7. Si T_a est non vide, on note b l'entier tel que $a^2 + b^2 = 5^{p-1}$. Alors, T_a est l'ensemble des points $(\pm a, \pm b)$ et $(\pm b, \pm a)$, pour un total de 8 points.
   Comme p est impair, 5^{p-1} est une puissance entière de 25, qui est congru à 1 modulo 3. Donc $5^{p-1} \equiv 1\,[3]$. Donc, $a^2 + b^2 \equiv 1\,[3]$. Si a est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3, alors a^2 est congru à 0, 1 ou 1 modulo 3 ; de même pour b. Il y a donc deux cas à considérer :

   - Si $a \equiv 0\,[3]$, alors $b \equiv \pm 1\,[3]$. Quitte à changer b par son opposé, $b \equiv 1\,[3]$. Alors, les points de $T_a \cap F_{p-1}$ sont $(-b, a)$ et $(-b, -a)$.
   - Si $a \equiv \pm 1\,[3]$, alors $b \equiv 0\,[3]$. Le raisonnement est le même en échangeant les rôles de a et b.

   De plus, 2 points ainsi considérés sont distincts car ni a ni b n'est nul. Finalement, $T_a \cap F_{p-1}$ est de cardinal 2.

8. On a $E_{p-1} = \displaystyle\bigcup_{a \in [\![0, \frac{5^{(p-1)/2}}{2} - 1]\!]} T_a$, l'union étant disjointe. On intersecte avec F_{p-1} :

   $$F_{p-1} = \bigcup_{a \in [\![0, \frac{5^{(p-1)/2}}{2} - 1]\!]} \Big(F_{p-1} \cap T_a\Big).$$

   On sait que E_{p-1} est de cardinal $4p$, que T_0 est de cardinal 4 et que les T_a non vides sont de cardinal 8 (pour $a \neq 0$). Il y a donc $\dfrac{4p-4}{8} = \dfrac{p-1}{2}$ ensembles T_a non vides. Alors, F_{p-1} est l'union de $F_{p-1} \cap T_0$ (de cardinal 1 et des $\dfrac{p-1}{2}$ ensembles $F_{p-1} \cap T_a$ non vides, de cardinal 2. D'où un total de $1 + \dfrac{p-1}{2} \times 2 = p$ éléments dans F_{p-1}.

9. Par un argument similaire à celui de la question 5, le cercle de centre $1/3$ et de rayon $1/3 \times 5^{(p-1)/2}$ convient.