DM 5 - Théorème de Cantor-Bernstein, ensembles dénombrables et théorème de Knaster-Tarski

1 Théorème de Cantor-Bernstein

1. Par définition, E_∞ est le complémentaire de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dans E. On a donc bien $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} E_n$.

   Par définition, les éléments de E_0 n'ont pas de parent mais ceux de E_n $(n \geq 1)$ ou de E_∞ en ont un. Donc les intersections $E_0 \cap E_\infty$ et $E_0 \cap E_n$ $(n \geq 1)$ sont vides. Comme E_∞ est le complémentaire de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dans E, les intersections $E_n \cap E_\infty$ $(n \geq 1)$ sont vides aussi.

   Il reste à vérifier que si $n, p \in \mathbb{N}^*$ sont distincts, alors $E_n \cap E_p = \emptyset$. On raisonne par l'absurde, en supposant l'existence d'un élément $x \in E_n \cap E_p$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $n < p$. Comme x a n ancêtres, on peut noter x_1 le parent de x, x_2 le parent de x_1... jusqu'à x_n le parent de x_{n-1}. Par une récurrence finie immédiate, on montre que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in E_{n-k} \cap E_{p-k}$ si k est pair et $x_k \in F_{n-k} \cap F_{p-k}$ si k est impair. En particulier, $x_n \in E_0 \cap E_{n-p}$ ou $x_n \in F_0 \cap F_{n-p}$. Comme x_n appartient à E_0 ou à F_0, il n'a pas de parent. Comme il appartient à E_{n-p} ou F_{n-p}, avec $n - p \geq 1$, il en a un. C'est absurde. Donc $E_n \cap E_p = \emptyset$.

   Bilan : l'union $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} E_n$ est disjointe.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in E_n$. L'élément $f(x) \in F$ a pour parent x, qui a n ancêtres. Ainsi $f(x)$ a $n+1$ ancêtres. Donc $f(x) \in F_{n+1}$. Ceci montre que $f(E_n) \subset F_{n+1}$.

   Soit $y \in F_{n+1}$. Comme $n+1 \geq 1$, y a un parent, qu'on note x, et x a n ancêtres. Donc $x \in E_n$ et $f(x) = y$. Ainsi, $F_{n+1} \subset f(E_n)$.

   Par double inclusion, on a montré que $f(E_n) = F_{n+1}$.

   Ainsi, f induit bien une application $f_{|E_n} : E_n \to F_{n+1}$ et cette application est surjective. Comme f est injective, $f_{|E_n}$ aussi et finalement $f_{|E_n} : E_n \to F_{n+1}$ est une bijection.

   On montre de même que $g(F_n) = E_{n+1}$ et que $g_{|F_n} : F_n \to E_{n+1}$ est une bijection.

3. Soit $x \in E_\infty$. L'élément $f(x)$ a pour parent x donc $f(x) \notin F_0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \notin E_{n-1}$ et donc $f(x) \notin F_n$. Ainsi, $f(x) \in F_\infty$. Ainsi $f(E_\infty) \subset F_\infty$.

   Soit $y \in F_\infty$. Par définition, y a un parent, qu'on note x. Si x appartenait à E_n, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, y appartiendrait à F_{n+1}, ce qui n'est pas. Donc $x \in E_\infty$ et on a montré que $F_\infty \subset f(E_\infty)$.

   Par double inclusion, on a montré que $f(E_\infty) = F_\infty$.

   On en déduit que $f_{|E_\infty} : E_\infty \to F_\infty$ est bien définie et que c'est une surjection. Comme f est une injection, $f_{|E_\infty} : E_\infty \to F_\infty$ est aussi une injection ; c'est donc une bijection.

4. Pour simplifier les notations, on note :

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f_{|E_n} : E_n \to F_{n+1}$ et $g_n = g_{|F_n} : F_n \to E_{n+1}$.
   - $f_\infty = f_{|E_\infty} : E_\infty \to F_\infty$.

   Toutes ces applications sont des bijections. On pose maintenant $\phi : E \to F$, définie par

$$\forall x \in E, \phi(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in E_n, \text{ avec } n \text{ pair} \\ \left(g_{n-1}\right)^{-1}(x) & \text{si } x \in E_n, \text{ avec } n \text{ impair} \\ f_\infty(x) & \text{si } x \in E_\infty. \end{cases}$$

   Cette application est bien définie car $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} E_n$ et que l'union est disjointe.

   Remarquons que si $x \in E_n$ avec n pair, $\phi(x) \in F_{n+1}$, si $x \in E_n$ avec n impair, $\phi(x) \in F_{n-1}$ et si $x \in E_\infty$, $f(x) \in F_\infty$.

   On en déduit (en utilisant que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} F_n$ et que cette union est disjointe) que si $x, x' \in E$ sont tels que $\phi(x) = \phi(x')$, alors ou bien x, x' appartiennent à un même E_n ($n \in \mathbb{N}$), ou bien $x, x' \in E_\infty$. Mais comme f_n, $(g_n)^{-1}$ et f_∞ sont bijectives (donc injectives), nécessairement $x = x'$. Ainsi ϕ est injective.

   Soit maintenant $y \in F$.

   - Ou bien il existe un entier n pair tel que $y \in F_n$. Alors, notons $x = g_n(y) \in E_{n+1}$. On a $y = (g_n)^{-1}(x) = \phi(x)$ (car $n+1$ impair). Donc $y \in \mathrm{Im}(\phi)$.
   - Ou bien il existe un entier n impair tel que $y \in F_n$. Alors, comme $f_{n-1} : E_{n-1} \to F_n$ est bijective, il existe $x \in E_{n-1}$ tel que $y = f_{n-1}(x) = \phi(x)$ (car $n-1$ est pair). Donc $y \in \mathrm{Im}(\phi)$.
   - Ou bien $y \in F_\infty$. Alors, comme f_∞ est bijective, il existe $x \in E_\infty$ tel que $y = f_\infty(x) = \phi(x)$. Donc $y \in \mathrm{Im}(\phi)$.

   Par disjonction de cas, on en déduit que ϕ est surjective.

   Bilan : ϕ est bijective et donc E et F sont équipotents.

2 Ensembles infinis dénombrables

1. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, on construit une bijection $\phi_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

   - Pour $k = 1$, on prend $\phi_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
   - Soit $k \geq 1$. On suppose construite une bijection $\phi_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. On définit $\phi_{k+1} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ par
$$\phi_{k+1}(n_1, \dots, n_{k+1}) = \psi\Big(n_1, \phi_k(n_2, \dots, n_{k+1})\Big),$$

où $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est la bijection définie à la question précédente.

Montrons que ϕ_{k+1} est une bijection. Pour ce faire, considérons un entier $n \in \mathbb{N}$ et montrons que n a un unique antécédent par ϕ_{k+1}. Soit $(n_1, \dots, n_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$; c'est un antécédent de n par ϕ_{k+1} ssi $\psi\Big(n_1, \phi_k(n_2, \dots, n_{k+1})\Big) = n$ ssi $\Big(n_1, \phi_k(n_2, \dots, n_{k+1})\Big) = \psi^{-1}(n)$.

Notons $(u_1, u_2) = \psi^{-1}(n) \in \mathbb{N}^2$. La condition précédente est donc équivalente à

$$n_1 = u_1 \text{ et } \phi_k(n_2, \dots, n_{k+1}) = u_2.$$

Comme $\phi_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est une bijection, cela est encore équivalent à

$$n_1 = u_1 \text{ et } (n_2, \dots, n_{k+1}) = \phi_k^{-1}(u_2).$$

D'où l'existence et l'unicité d'un antécédent de n par ϕ_{k+1}. Ceci montre la bijectivité de ϕ_{k+1} et conclut la récurrence.

2. Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. Par récurrence forte, on construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A par :

   - $a_0 = \min(A)$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_0, \dots, a_k$ ont été définis. On définit $a_{k+1} = \min\big(A - \{a_0, \dots, a_k\}\big)$.

   Cette suite est bien définie car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A - \{a_0, \dots, a_k\}$ est non vide (car A est infinie). De plus, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante par construction.

   Notons $\psi : \mathbb{N} \to A, n \mapsto a_n$. Comme ψ est strictement croissante, elle est injective. Supposons par l'absurde que ψ n'est pas surjective. Alors, on peut considérer le plus petit entier $a \in A$, qui n'est pas dans l'image de ψ. En particulier, $a \neq a_0$. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k < a\}$ n'est pas vide (il contient 0) et il est fini (comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, seul un nombre fini de a_k peuvent être inférieurs à a). Il existe donc un unique indice $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k < a < a_{k+1}$. Alors $a < a_j$, pour tout $j \geq k+1$ et $a \leq b$, pour tout $b \in A - \mathrm{Im}(\psi)$ (par hypothèse). Donc $a = \min(A - \{a_0, \dots, a_k\})$; et donc $a = a_{k+1}$. C'est absurde.

   Donc ψ est surjective ; c'est donc une bijection.

3. Soit E un ensemble infini dénombrable. Soit F une partie infinie de E. Notons $f : E \to \mathbb{N}$ une bijection. Alors $f(F)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$ (l'image par une bijection d'un ensemble infini est un ensemble infini), donc $f(F)$ est infini dénombrable. Notons $\psi : f(F) \to \mathbb{N}$ une bijection.

   De plus, $f_{|F} : F \to f(F)$ est une bijection. Donc $\psi \circ f_{|F} : F \to \mathbb{N}$ est une bijection et F est infini dénombrable.

4. Soit q un nombre rationnel. Il existe un unique couple $(a_q, b_q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q = \dfrac{a_q}{b_q}$ et tels que a_q et b_q sont premiers entre eux. L'application $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, q \mapsto (a_q, b_q)$ est une injection puisque le couple (a_q, b_q) détermine q. Ainsi $\mathbb{Q}$ est équipotent à $\iota(\mathbb{Q})$, partie infinie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

   Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est infini dénombrable. Notons $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ une bijection et $f_2 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ une bijection (p. ex. $f_2(n) = n - 1$). Alors, on vérifie immédiatement que l'application $\tau : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^2, (n_1, n_2) \mapsto (f_1(n_1), f_2(n_2))$ est une bijection. Donc $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est équipotent à $\mathbb{N}^2$, donc est infini dénombrable. Donc $\iota(\mathbb{Q})$ est infini dénombrable. Donc $\mathbb{Q}$ aussi.

3 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

1. Soit $u \in \mathscr{S}$. Pour tout $N \geq 1$, on note $S_N = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{u_n}{10^n}$. Comme pour tout $N \geq 1$, $S_{N+1} - S_N = \dfrac{u_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0$, $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante. De plus, comme pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 9$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N \leq \sum_{n=1}^{N} \dfrac{9}{10^n} = \dfrac{9}{10} \dfrac{1 - \frac{1}{10^N}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - 10^{-N} < 1$. Donc, (S_N) est une suite croissante et majorée par 1, donc elle converge. Ceci montre que $f(u)$ est bien défini, *a priori* dans $[0, 1]$.
   On peut montrer (analogue à la question 2.) qu'on ne peut pas avoir $f(u) = 1$ (il faudrait que la suite u soit constante égale à 9, ce qui est exclu). On omet la vérification de ce point, non nécessaire pour la suite.

2. On coupe la somme en cinq.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{10^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{v_n - u_n}{10^n} + \frac{v_k - u_k}{10^k} + \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{v_n - u_n}{10^n} + \frac{v_p - u_p}{10^p} + \sum_{n=p+1}^{N} \frac{v_n - u_n}{10^n}.$$

   - La première somme est nulle.
   - $\dfrac{v_k - u_k}{10^k} \geq \dfrac{1}{10^k}$.
   - Pour tout $n \in [\![k+1, p-1]\!]$, $v_n - u_n \geq -9$. Donc, $\sum_{n=k+1}^{p-1} \dfrac{v_n - u_n}{10^n} \geq \dfrac{-9}{10^{k+1}} \dfrac{1 - \frac{1}{10^{p-k-1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{1}{10^{p-1}} - \dfrac{1}{10^k}$.
   - $\dfrac{v_p - u_p}{10^p} \geq \dfrac{-8}{10^p}$.
   - De même que pour la somme précédente, $\sum_{n=p+1}^{N} \dfrac{v_n - u_n}{10^n} \geq \dfrac{1}{10^N} - \dfrac{1}{10^p}$.

En sommant les inégalités, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{v_n}{10^n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n}{10^n}\geq\frac{1}{10^{p-1}}+\frac{-8}{10^p}+\frac{1}{10^N}-\frac{1}{10^p}=\frac{1}{10^p}+\frac{1}{10^N}.$$

3. Ainsi, pour tout $N\geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{v_n}{10^n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n}{10^n}\geq\frac{1}{10^p}$. En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on en déduit que $f(v)-f(u)\geq\dfrac{1}{10^p}$. En particulier, $f(u)\neq f(v)$.
   Comme u et v sont deux suites distinctes de $\mathscr{S}$ quelconques, on a montré que f est injective.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note v_n un entier dans $[\![0,8]\!]$ distinct de u_n^n (par exemple, on peut prendre $v_n=0$ si $u_n^n\neq 0$ et $v_n=1$ si $u_n^n=0$). Comme v_n ne vaut jamais 9, la suite (v_n) ne stationne pas en 9, donc $(v_n)\in\mathscr{S}$.
   De plus, si $k\in\mathbb{N}$, les suites v et u^k sont distinctes. En effet, v_k et u_k^k diffèrent, par construction.

5. La question précédente montre qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{S}$. Donc, $\mathscr{S}$ n'est pas dénombrable. Comme il existe une injection de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ n'est pas non plus dénombrable (s'il l'était, l'ensemble $f(\mathscr{S})$ le serait aussi par la question 5 de l'exercice précédent ; comme cet ensemble est en bijection avec $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}$ lui-même serait dénombrable).

4 Cardinaux

1. La relation $\sim$ est :

   - réflexive. Si $A\in\Omega$, alors id_A est une bijection de A dans A.
   - symétrique. Si $A,B\in\Omega$ et si $f:A\to B$ est une bijection, alors $f^{-1}:B\to A$ est une bijection.
   - transitive. Si $A,B,C\in\Omega$ et si $f:A\to B$ et $g:B\to C$ sont des bijections, alors $g\circ f:A\to C$ est une bijection.

   Donc, $\sim$ est une relation d'équivalence sur Ω.

2. Montrons déjà que $\leq$ est bien définie. Soient $A,B\in\Omega$. On suppose que $A',B'\in\Omega$ sont tels que $A\sim A'$ et $B\sim B'$. Il existe donc deux bijections $\phi_A:A\to A'$ et $\phi_B:B\to B'$. Alors, si $f:A\to B$ est une injection, l'application $\phi_B\circ f\circ\phi_A^{-1}:A'\to B'$ est une injection, car c'est la composée de trois injections. Le raisonnement étant symétrique, on en déduit qu'il existe une injection de A dans B ssi il existe une injection de A' dans B'.
   Donc, la relation $\leq$ est bien définie sur C_Ω.

   De plus, $\leq$ est :

- réflexive. Si $\hat{A} \in C_\Omega$, alors $\hat{A} \leq \hat{A}$ car $\mathrm{id}_A : A \to A$ est une injection.
- transitive. Si $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in C_\Omega$ sont tels que $\hat{A} \leq \hat{B}$ et $\hat{B} \leq \hat{C}$, alors on peut trouver des injections $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Alors, $g \circ f : A \to C$ est une injection, de sorte que $\hat{A} \leq \hat{C}$.
- antisymétrique. Soient $\hat{A}, \hat{B} \in C_\Omega$ telles que $\hat{A} \leq \hat{B}$ et $\hat{B} \leq \hat{A}$. Il existe donc deux injections $f : A \to B$ et $g : B \to A$. Alors, par le théorème de Cantor-Bernstein, il existe une bijection de A dans B. Donc, par définition de C_Ω, $\hat{A} = \hat{B}$.

3. Pour tout $c \in \mathscr{C}$, on note $c = (E_c, F_c, f_c)$ (autrement dit, chacune des composantes d'un élément de $\mathscr{C}$ est indexée par cet élément lui-même). On note $E_\infty = \bigcup_{c \in \mathscr{C}} E_c$, $F_\infty = \bigcup_{c \in \mathscr{C}}$ et $f_\infty : E_\infty \to F_\infty$ est définie par $f_\infty(x) = f_c(x)$, si $c \in \mathscr{C}$ est un triplet quelconque tel que $x \in E_c$.
Vérifions que ceci est bien défini.

    - D'abord, si $x \in E_\infty$, comme $E_\infty = \bigcup_{c \in \mathscr{C}} E_c$, x est dans au moins un E_c.
    - Ensuite, pour un tel c, $f(x) \in F_c \subset F_\infty$. Donc, l'ensemble de départ et d'arrivée de f_∞ sont conformes.
    - Enfin, il faut voir que l'image $f_\infty(x)$ ne dépend pas du choix de c. Or, si $x \in E_c$ et E'_c, alors $c \leq c'$ ou $c' \leq c$ (car l'ordre $\leq$ est total sur $\mathscr{C}$). Par symétrie, on peut supposer que $c \leq c'$; cela signifie que $E_c \subset E_{c'}$, $F_c \subset F_{c'}$ et que $f_{c'}$ prolonge f_c. En particulier, $f_{c'}(x) = f_c(x)$. Donc, la définition de $f_\infty(x)$ ne dépend pas du choix de $c \in \mathscr{C}$ (tel que $x \in E_c$).

    Montrons maintenant que $c_\infty = (E_\infty, F_\infty, f_\infty)$ est la borne supérieure de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{A}$. Par construction, si $c \in \mathscr{C}$, $E_c \subset E_\infty$, $F_c \subset F_\infty$ et f_∞ prolonge f_c. Donc, pour tout $c \in \mathscr{C}$, $c \leq c_\infty$. Donc, c_∞ est un majorant de $\mathscr{C}$.

    Enfin, si $\tilde{c} = (\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{f})$ est un autre majorant de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{A}$, $\tilde{E}$ doit contenir tous les E_c, donc aussi contenir leur union E_∞ ; de même $\tilde{F}$ doit contenir F_∞ ; enfin $\tilde{f}$ doit être un prolongement de tous les f_c, ce qui montre implique aisément qu'elle est un prolongement de f_∞. Ainsi, $c_\infty \leq \tilde{c}$. Donc, c_∞ est la borne supérieure de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{A}$.

4. Choisissons un élément $a \in A \setminus E$ et un élément $b \in B \setminus F$. Notons $E' = E \cup \{a\}$ et $F' = F \cup \{b\}$. Enfin, notons $f' : E' \to F'$, définie par $\forall x \in E, f'(x) = f(x)$ et $f'(a) = b$. On a $(E, F, f) \leq (E', F', f')$, ce qui contredit la maximalité du triplet (E, F, f).

5. D'après la question précédente, on a $E = A$ ou $F = B$.

    - Cas $E = A$. Alors, f est une bijection de A dans une partie F de B. En voyant plutôt f comme une application de A dans B (en changeant l'espace d'arrivée), on ne modifie pas le caractère injectif. Ainsi, f est une injection de A dans B.

- Cas $F = B$. Alors, f est une bijection d'une partie E de A dans B. Sa bijection réciproque f^{-1} va de B dans E. De même que précédemment, f^{-1} peut être vue comme une injection de B dans A.

Donc, il existe ou bien une injection de A dans B, ou bien une injection de B dans A. Donc, l'ordre $\leq$ sur C_Ω est total.

5 Théorème de Knaster-Tarski

Remarque : j'ai écrit le corrigé rapidement ; il faudrait sans doute détailler quelques points.

1. Si T est totalement ordonné et si $a, b \in T$, alors ou bien $a \geq b$, ou bien $b \geq a$. Dans le premier cas, $\sup\{a, b\} = a$ et $\inf\{a, b\} = b$; dans le deuxième cas, c'est le contraire.

2. On a vu en cours que pour cette relation d'ordre, la borne supérieure de deux ensembles est donnée par leur union, la borne inférieure par leur intersection.

3. On a vu en cours que pour cette relation d'ordre, la borne supérieure de deux entiers est leur ppcm, la borne inférieure leur pgcd.

4. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de parties de E, on montre – comme pour le cas de deux ensembles – que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est la borne supérieure de la partie $\{A_i, i \in I\}$, dans l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$.

5. (a) Soit $m \in \mathscr{M}$, soit $a \in A$. Comme $\overline{m}$ est un majorant de $\mathscr{M}$, on a $m \leq \overline{m}$. De plus, par hypothèse, $m \leq a$. Donc, m est un majorant de $\{\overline{m}, a\}$. Donc, par définition de la borne inférieure, $m \leq \inf\{\overline{m}, a\}$.

   (b) On fixe $a \in A$. L'inégalité précédente étant vraie pour tout $m \in \mathscr{M}$, $\inf\{\overline{m}, a\}$ est donc un majorant de $\mathscr{M}$. Par définition d'une borne supérieure, on a donc $\overline{m} \leq \inf\{\overline{m}, a\}$. L'inégalité inverse est vraie par définition d'un minorant ; donc il y a égalité.

   (c) L'égalité de la question précédente montre en particulier que pour tout $a \in A$, $\overline{m} \leq a$. Donc, $\overline{m} \in \mathscr{M}$. Ainsi, $\overline{m}$ est le plus grand des majorants de $\mathscr{M}$ (pas juste la borne supérieure), c'est donc la borne inférieure de A, par définition.

6. (a) Soit $x \in A$. Comme M majore A, on a $x \leq M$. Par croissance de f, $f(x) \leq f(M)$. Comme $x \leq f(x)$, on a par transitivité, $x \leq f(M)$. Ainsi, $f(M)$ est un majorant de A ; comme M est le plus petit des majorants de A, on a $M \leq f(M)$.

   (b) Comme $M \leq f(M)$, on a aussi par croissance $f(M) \leq f\big(f(M)\big)$. Par définition de A, $f(M) \in A$. Comme M est un majorant de A, on a donc $f(M) \leq M$. Par antisymétrie de la relation d'ordre, $M = f(M)$. Donc, M est un point fixe de f.

7. **Une première application.**

(a) Soit A une partie non vide de $[a,b]$ (le cas où A est vide est immédiat). Par la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, A – vue comme partie de $\mathbb{R}$ – admet une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$ (car A est majoré par b). Comme A contient un élément supérieur à a, on a $M \geq a$. De plus, si on avait $M > b$, alors b serait un majorant de A, strictement plus petit que M, ce qui est absurde. Donc, $M \in [a,b]$. On se convainc que cela revient à dire que M est la borne supérieure de A – vue comme partie de $[a,b]$. Donc, toute partie de $[a,b]$ admet une borne supérieure ; de même borne inférieure. Donc, $[a,b]$ est un treillis complet.
Remarque. Ne pas se contenter de dire que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure et que $[a,b]$ est une partie de $\mathbb{R}$; sinon, on ne comprend pas ce qu'il se passe pour l'intervalle ouvert $]0,1[$ à la question c).

(b) On applique le théorème de Knaster-Tarski.

(c) Non. La fonction $x \mapsto x^2$ est un contre-exemple pour $]0,1[$ et la fonction $x \mapsto x+1$ est un contre-exemple pour $\mathbb{R}$.
Le problème vient du fait que ni $]0,1[$ ni $\mathbb{R}$ ne sont des treillis complets. Le premier est borné mais ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure : $]0,1[$ n'admet pas de borne supérieure, quand on le voit comme une partie de lui-même (*à méditer*) ; pour $\mathbb{R}$, c'est encore plus simplet puisque ce n'est pas un ensemble borné.

8. **Une autre preuve du théorème de Cantor-Bernstein.**

(a) Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. On a $f(A) \subset f(B)$. Donc, $F \setminus f(B) \subset F \setminus f(A)$. Donc, $g\big(F \setminus f(B)\big) \subset g\big(F \setminus f(A)\big)$. Et donc finalement $G(A) = E \setminus g\big(F \setminus f(A)\big) \subset E \setminus g\big(F \setminus f(B)\big) = G(B)$. Donc, G est une application croissante.

(b) On applique le théorème de Knaster-Tarski ; on a montré précédemment que $\mathscr{P}(E)$ est un treillis complet.

(c) Traduisons déjà le fait que M est un point fixe de G. On a $M = E \setminus g\big(F \setminus f(M)\big)$. Cela signifie qu'un élément $x \in E$ vérifie $x \notin M \iff \exists y \in F \setminus f(M) : x = g(y)$. Par injectivité de g, ce y doit être unique ; avec les notations de l'énoncé, on peut même écrire : $x \notin M \iff g^{-1}(x) \notin f(M)$.
Et on a donc aussi $x \in M \iff g^{-1}(x) \in f(M)$.
Considérons maintenant un $y \in F$ et cherchons à résoudre $h(x) = y$, avec $x \in E$. Il y a deux cas.

- Si $y \in f(M)$, il existe un (unique) $x \in M$ tel que $y = f(x)$. Et alors $y = h(x)$. De plus, y n'est pas de la forme $h(t)$ pour un $t \notin M$, car sinon on aurait $y = g^{-1}(t)$ avec $t \notin M$ et $g^{-1}(t) \in f(M)$, contredisant les équivalences précédentes. On a donc trouvé un unique antécédent à y.
- Si $y \notin f(M)$, alors y ne peut pas s'écrire $h(x)$, avec x dans M. Et si $x \notin M$, on a $y = h(x) \iff y = g^{-1}(x) \iff g(y) = x$. Le seul antécédent envisageable de y par h est donc $g(y)$. Et on a bien $g(y) \notin M$ (toujours grâce aux équivalences précédentes). Ceci conclut ce cas et la démonstration.