DM 5 - Théorème de Cantor-Bernstein, ensembles dénombrables et théorème de Knaster-Tarski – Reprise

1 Théorème de Cantor-Bernstein

1. On *voit bien* que l'union est disjointe mais dire qu'un élément ne peut pas avoir n et m ancêtres (avec $n \neq m$) ne justifie rien. Si on veut formaliser l'argument, une récurrence est nécessaire.

2. Il n'y a pas besoin de montrer que la restriction d'une application injective est injective. De plus, quand on co-restreint une application à son image, la nouvelle application est surjective par construction.

3. RAS

4. Un dessin est apprécié. Quelques personnes montrent que f est bijective ; il faut alors s'interroger sur un problème qui permet de montrer qu'une application injective est automatiquement bijective... Une définition claire de h est attendue ; pour montrer qu'elle est bijective, le plus rapide est ou bien d'écrire la bijection réciproque, ou bien de montrer directement que chaque élément à l'arrivée a *exactement* un antécédent (en distinguant selon le F_n où il se trouve).

2 Ensembles infinis dénombrables

1. Beaucoup de notations très confuses pour écrire une application définie sur des uplets.

2. Le plus simple est de construire la bijection par récurrence en utilisant l'ordre sur $\mathbb{N}$. Certains écrivent une démonstration qui revient à dire que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est de la forme $[\![n_0, +\infty[\![$.

3. Il faut se ramener à la question précédente. Dire que *ça marche pareil* est bien trop vague : dans un ensemble dénombrable quelconque, on ne dispose pas de notion d'ordre sur les éléments.

4. L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est ni égal à $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, ni égal à une partie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. En revanche, il existe une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$: à un rationnel q, on associe l'unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q = \frac{a}{b}$, avec $a \wedge b = 1$.
   La distinction sur le signe de q est inutile et chronophage.

3 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

1. Il s'agit de montrer d'une part que la limite existe (et il ne suffit pas de dire que le terme $\dfrac{a_n}{10^n}$ tend vers 0, comme le montre l'exemple de la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$) ; et que cette limite est strictement inférieure à 1. L'aspect *strict* est trop souvent occulté ; on rappelle que le passage à la limite dans les inégalités fait perdre le caractère *strict* ; il fallait utiliser que les suites ne stationnent pas en 9.
   Bien sûr, on est simplement en train de coder un réel de $[0, 1[$ par son unique développement décimal ne stationnant pas en 9 ; mais il n'y avait jamais besoin de le dire.

2. RAS

3. Pour une fois, il est plus rapide de montrer directement que $u \neq v \implies f(u) \neq f(v)$. Pas besoin de revenir à la vérification usuelle de l'injectivité par contraposition.

4. Il faut une définition claire de la suite v ; écrire qu'on prend une suite v telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq u_n^n$ n'est *pas* une construction de la suite.

5. La question précédente se reformule immédiatement en : il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{S}$, et donc en particulier pas de bijection. Ensuite, nul besoin de montrer que f est bijective (ce que les Notes après l'exercice affirmaient) : si $\mathbb{R}$ était dénombrable, $[0, 1[$ le serait aussi (comme partie infinie), donc $f(\mathscr{S})$ aussi, donc $\mathscr{S}$ aussi.
   De façon générale, on retiendra que s'il existe une injection d'un ensemble infini A dans un ensemble infini dénombrable, alors A est infini dénombrable.